

PENGANTAR

Dengan mengucapkan syukur alhamdulillah akhirnya buku pegangan siswa untuk matakuliah statika struktur I, khususnya kelas yang diasuh penulis, dapat diselesaikan. Buku ini disusun berdasar pengalaman penulis dalam mengajar statika struktural pada semester-semester yang lalu. Namun demikian, pada edisi pertama, buku ini belum dicobakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran dikelas; karena itu disadari masih banyak kekurangan yang terdapat pada buku ini. Seiring dengan penggunaan dalam proses pembelajaran maka akan dilakukan penyempurnaan disana-sini.

Saran yang diberikan demi perbaikan mutu buku ini sangatlah dihargai, sehingga dengan makin sempurnanya buku ini, tidak hanya penulis yang menggunakannya sebagai buku pegangan siswa dalam proses pembelajaran statika struktur I tetapi dapat juga digunakan oleh para dosen pengajar lainnya.

Malang, Agustus 2003

Djarot B. Darmadi

DAFTAR ISI

PENGANTAR I

DAFTAR ISI II

PENDAHULUAN 1

1.1 Apakah Mekanika Itu? 1

1.2 Momen Gaya Terhadap Suatu Sumbu 3

TRUSS DENGAN METODE JOINT 5

2.1 Definisi Trus 5

2.2 Trus Sederhana 6

2.3 Analisa Truss Dengan Metode Joint 6

TRUSS DENGAN METODE VEKTOR 9

TRUSS DENGAN METODE POTONGAN DAN METODE GRAFIS 14

4.1 Metode Potongan 14

4.2 Metode Grafis : diagram Maxwell 16

KABEL DENGAN BEBAN TERPUSAT DAN KABEL PARABOLA 19

5.1 Kabel Dengan Beban Terkonsentrasi 19

5.2 Kabel Dengan Beban Terdistribusi 21

5.3 Kabel Parabola 22

KATENARI 27

TITIK PUSAT MASSA LUASAN DAN GARIS 31

7.1 Luasan 31

7.2 Garis 33

7.3 Keping dan Kawat Komposit 35

TITIK BERAT VOLUME 38

8.1 Pusat Gravitasi Benda tiga Dimensi. Titik Berat Volume 38

8.2 Benda Komposit 39

METODE KEDUA LUASAN 42

9.1 Momen Kedua, atau Momen Inertia Bidang 42

9.2 Teorema Sumbu Sejajar 45

9.3 Momen Inertia bidang Komposit 46

MOMEN INERTIA POLAR 49

10.1 Momen Inertia Polar 49

10.2 Jari-Jari Girasi Suatu Bidang 49

PRODUCT INERTIA 52

11.1 Sumbu Utama dan Momen Inertia Utama 53

11.2 Lingkaran Mohr Untuk Perkalian Inertia 57

MOMEN INERTIA MASSA 61

12.1 Momen Inertia Massa 61

12.2 Teorema Sumbu sejajar 63

12.3 Momen Inertia Keping Tipis 64

12.3.1 Keping Persegi Empat 65

12.3.2 Keping Bundar 66

12.4 Momen Inertia Volume Dengan Integrasi 66

12.5 Momen Inertia Benda Komposit 67

BAB I

PENDAHULUAN

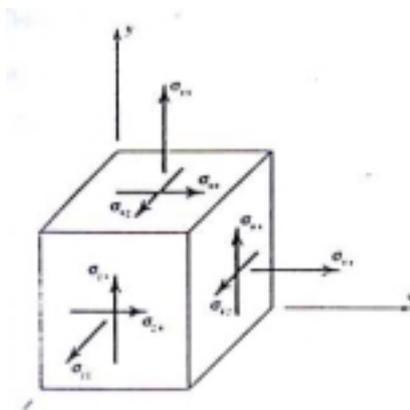
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Arti statika, Alasan tegangan mendapat perhatian khusus dibanding gaya bagi *engineer*, Tegangan pada titik, Tensor tegangan 3D→2D→tarik+geser, Kurva tegangan-regangan dan hukum Hooke, Gaya sebagai bagian dari Momen, Teorema Varignon dan pengertian tidak adanya momen terhadap suatu titik.

1.1 Apakah Mekanika itu

Mekanika merupakan ilmu yang menggambarkan dan meramalkan kondisi benda yang diam atau bergerak karena pengaruh gaya yang beraksi padanya. Mekanika biasanya dibagi dalam tiga bagian: mekanika *benda tegar*, mekanika *benda lentuk*, dan mekanika *fluida*.

Mekanika benda tegar dibagi menjadi statika dan dinamika, statika menyangkut benda dalam keadaan diam/bergerak tanpa percepatan sedang dinamika menyangkut benda yang bergerak. Dalam bahasa matematis statika menyangkut kondisi benda dan gaya-gaya luar yang memenuhi: $\Sigma F = 0$.



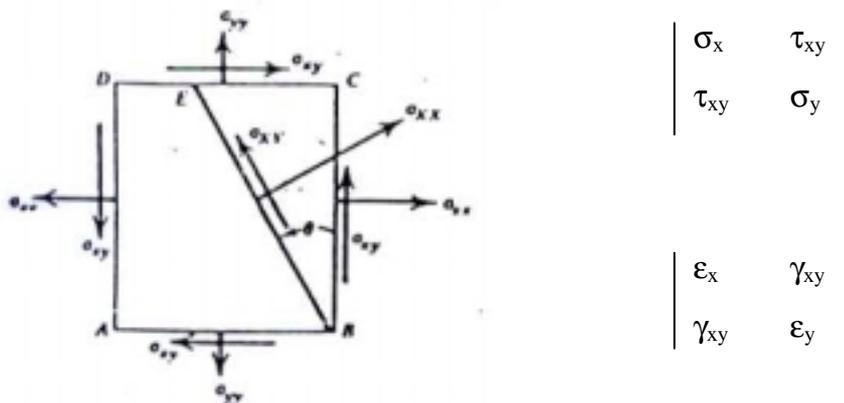
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

Gambar 1. Model Tegangan Pada Sebuah Titik

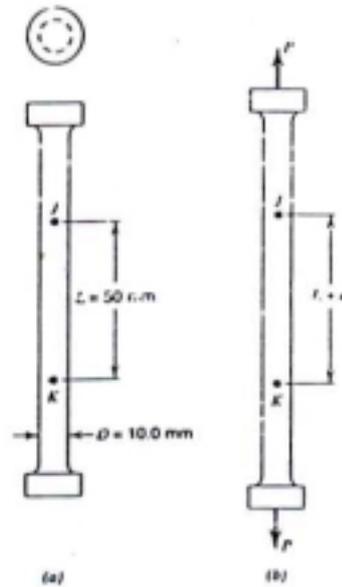
Para insinyur bahan dan konstruksi lebih tertarik dengan tegangan yang bekerja pada elemen: $\sigma = F/A$. Dengan mengetahui tegangan yang bekerja dapat diprediksi apakah elemen→konstruksi akan gagal atau tidak terhadap beban yang diterima. Tegangan pada titik didefinisikan seperti terlihat pada gambar 1. Pada gambar tersebut juga ditunjukkan matrik tegangan dan matrik regangannya.

Pada kondisi praktis, tinjauan tegangan biasa disederhanakan menjadi kondisi tegangan dua dimensi seperti terlihat pada gambar 2. Pada gambar juga ditunjukkan matrik tegangan dan matrik regangannya.



Gambar 2. Model Tegangan 2 Dimensi

Data tentang tegangan ijin yang dapat diterima bahan biasanya diperoleh dari uji tarik. Biasanya uji tarik disederhanakan sebagai persoalan tegangan yang bekerja hanya secara 1 dimensi saja.



Gambar 3. Tegangan 1 Dimensi Pada Uji Tarik.

1.2 Momen Gaya Terhadap Suatu Sumbu

Telah disebutkan bahwa statika membahas suatu kondisi dimana $\Sigma F = 0$. Dua gaya F dan F' akan memenuhi kondisi tersebut jika besarnya sama dengan arah berlawanan. Misal suatu gaya F'' memiliki besar dan arah yang sama dengan gaya F , tetapi memiliki garis aksi yang berbeda dengan gaya F , tidak akan memberikan efek yang sama seperti F yang beraksi pada benda tegar. Walaupun F dan F'' dinyatakan oleh vektor yang sama, yaitu suatu vektor yang sama besar dan arahnya, kedua gaya ini tidak ekuivalen. Benar, kedua gaya ini cenderung memberi gerak yang sama terhadap benda tegar yaitu gerak translasi, tetapi gaya itu menimbulkan *rotasi* yang berbeda terhadap sembarang sumbu yang tegak-lurus terhadap gaya-gaya tersebut. Pengaruh gaya tersebut terhadap rotasi biasa dinyatakan dengan Momen.

$$M = Fd$$

Satu persyaratan lagi diperlukan bagi statika, yaitu kesetimbangan momen. $\Sigma M = 0$.

Teorema Varignon. Suatu teorema yang penting dalam statika dikemukakan oleh matematikawan Prancis Varignon (1654 – 1722). Teorema ini menyatakan bahwa *momen sebuah gaya terhadap sembarang sumbu sama dengan momen komponen gaya tersebut terhadap sumbu yang bersangkutan.*

BAB II

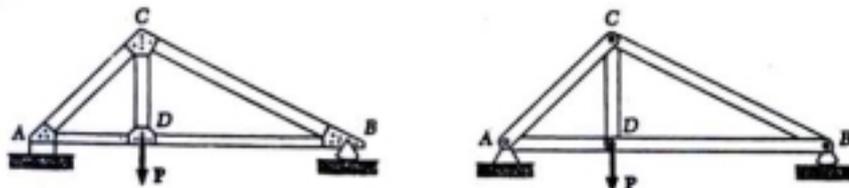
TRUSS DENGAN METODE *JOINT*

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Definisi Truss sebagai suatu konstruksi statis tertentu, Analisa dan tegangan pada truss dengan metode *joint*.

2.1 Definisi Trus

Trus (penunjang) merupakan salah satu jenis umum dari struktur teknik. Truss terdiri dari elemen berbentuk lurus dan sambungan (sendi) penghubung. Elemen-elemen truss dihubungkan dengan *sambungan pena (pin) pada ujung-ujungnya saja*; jadi tidak ada elemen yang menembus sambungan. Dalam gambar 4, misalnya, tidak ada elemen AB; sebagai gantinya terdapat dua elemen AD dan DB. Struktur aktual dibentuk dari beberapa truss yang dihubungkan bersama membentuk kerangka ruang. Masing-masing truss dirancang untuk memikul beban yang beraksi pada bidangnya, sehingga dapat diperlakukan sebagai struktur 2 dimensi.



Gambar 4. Contoh Model Truss

Pada umumnya, elemen-elemen truss berbentuk batang dan hanya bisa mendukung *beban ringan dalam arah lateral*; ini berarti semua beban harus diterapkan pada berbagai sambungan, dan bukan langsung pada elemen-elemennya. Bila suatu beban terkonsentrasi diterapkan antara dua sambungan, atau bila beban terdistribusi harus didukung oleh truss, seperti dalam kasus jembatan, sistim lantai harus ditambahkan dengan pemakaian *stringers* dan *Floor beams* mentransmisikan beban pada sambungan. Berat elemen truss juga

dianggap beraksi pada sambungan, setengah berat elemen tersebut diterapkan pada masing-masing sambungan yang dihubungkan oleh elemen itu.

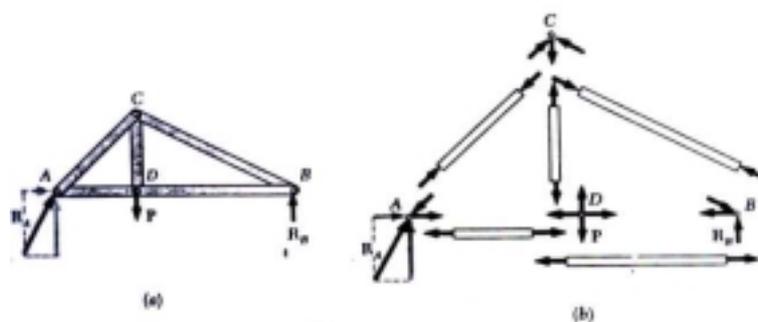
Sambungan pin menjamin hanya terjadi sistim tegangan 1 dimensi (lihat bab 1). Elemen individual dapat mengalami aksi seperti sketsa pada gambar 5. Dalam sketsa yang pertama gaya cenderung menarik elemen itu, dan elemen dalam keadaan tarik, sedangkan sketsa yang kedua, gaya cenderung untuk menekan elemen itu, elemen dalam keadaan tekan.

2.2 Truss Sederhana

Truss sederhana menggambarkan *truss tegar*, istilah tegar dipakai untuk menggambarkan bahwa truss *tidak ambruk*. Trus paling sederhana adalah bentuk segi-tiga. Truss sederhana berikutnya diperoleh dengan menambahkan 2 elemen baru dan satu joint. Sehingga dapat dirumuskan, bahwa pada truss sederhana jumlah total elemen adalah $m = 2n - 3$. Dimana n adalah jumlah sambungan.

2.3 Analisa Truss dengan Metode Joint

Jelas terlihat bahwa trus dapat dilihat sebagai sekelompok pin dan elemen dengan dua-gaya. Diagram benda bebas (*Free body diagram*) truss pada gambar 4 diperlihatkan pada gambar 5 yang diuraikan pada tiap elemen. Masing-masing elemen mengalami dua gaya, satu gaya pada masing-masing ujungnya. Gaya-gaya tersebut mempunyai besar sama, garis aksi yang sama dan berlawanan arah.



Gambar 5. Diagram Benda Bebas Pada Truss

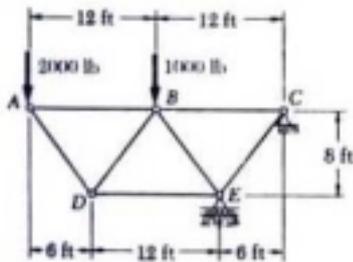
Disamping itu, hukum ketiga Newton menghendaki gaya aksi dan reaksi antara suatu elemen dengan pin besarnya sama dan arahnya berlawanan. Jadi gaya yang ditimbulkan oleh suatu elemen pada kedua pin yang dihubungkan harus berarah sepanjang elemen itu dan harus sama dan berlawanan. Karena garis aksi semua gaya internal dalam truss diketahui, analisa truss tereduksi menjadi perhitungan gaya pada berbagai elemen dan penentuan apakah elemen itu dalam keadaan tekan atau tarik. Karena keseluruhan truss dalam kesetimbangan, setiap pin harus dalam kesetimbangan. Kenyataan bahwa pin dalam kesetimbangan dapat dinyatakan dengan menggambarkan diagram benda bebasnya dan menuliskan dua persamaan kesetimbangan: $\Sigma F = 0$ dan $\Sigma M = 0$. Karena terdapat dua persamaan maka penyelesaian akan diperoleh jika hanya terdapat besar 2 gaya yang tidak diketahui (arahnya sudah diketahui). Perlu ditegaskan disini, yang dianalisa adalah gaya yang *diakibatkan oleh batang terhadap pin, gaya yang disebabkan oleh pin terhadap batang memiliki arah berlawanan*. Sehingga dapat disimpulkan gaya yang *meninggalkan* joint menghasilkan tegangan *tarik* pada batang, dan gaya yang *menuju* joint menghasilkan tegangan *tekan* pada batang.

Kenyataan bahwa keseluruhan truss merupakan benda tegar dalam kesetimbangan dapat dipakai untuk menuliskan persamaan-persamaan lagi-lagi untuk mencari reaksi pada tumpuan akibat beban (gaya luar).

Soal-soal:

Tentukan gaya-gaya pada seluruh elemen pada gambar-gambar truss berikut ini:

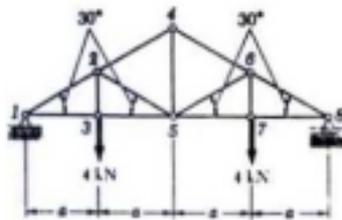
1



Jawab:

elemen 1-2 : 1500 lb T; elemen 1-3 : 2500 lb C
 elemen 2-3 : 5250 lb T; elemen 2-4 : 2500 lb T
 elemen 2-5 : 3750 lb C; elemen 3-5 : 8750 lb C
 elemen 4-5: 3000 lb C

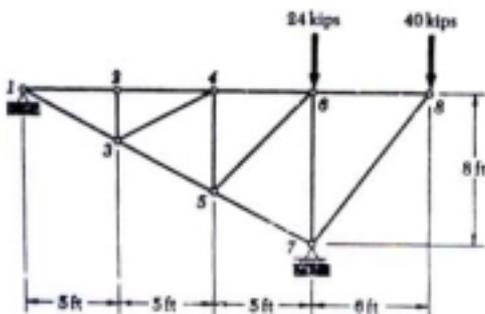
2.



Jawab:

elemen 1-2 = 6-8: 8 kN C
 elemen 1-3 = 3-5 = 5-7 = 7-8: 6,93 kN T
 elemen 2-3 = 4-5 = 6-7: 4 kN T
 elemen 2-4 = 2-5 = 4-6 = 5-6: 4 kN C

3.



Jawab:

elemen 1-2 = 2-4 = 4-6 = 6-8 = 30 kips T
 elemen 1-3 = 3-5 = 5-7 = 34 kips C
 elemen 2-3 = 3-4 = 4-5 = 5-6 = 0
 elemen 6-7 = 24 kips C
 elemen 7-8 = 50 kips C

BAB III

TRUSS DENGAN METODE VEKTOR

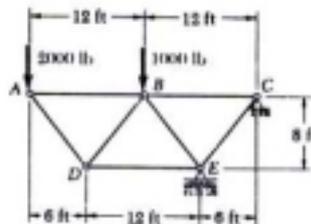
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Analisa dan tegangan pada truss dengan metode vektor dalam 2D, Analisa dan tegangan pada truss dengan metode vektor dalam 3D.

Analisa truss dengan metode vektor hampir mirip dengan metode sambungan. Kesetimbangan gaya dianalisa pada tiap-tiap joint. Arah dari gaya-gaya tersebut diuraikan ke dalam vektor satuan (i,j) untuk dua dimensi dan ke dalam vektor satuan (i,j,k) untuk truss ruang. Masing-masing gaya diuraikan dengan mengalikan cosinus arahnya yang biasa dilambangkan dengan \bar{e} . Cosinus arah adalah komponen vektor satuan pada arah (i,j) dan (i,j,k) . Contoh-contoh berikut ini akan memperjelas penggunaan metode vektor pada analisa truss.

Bila tidak ada keterangan lain, demi kemudahan biasanya horizontal sejajar dengan bidang gambar bersesuaian dengan sumbu x dengan demikian bersesuaian dengan vektor satuan i , vertikal sejajar bidang gambar bersesuaian dengan sumbu y dengan demikian bersesuaian dengan vektor satuan j dan terakhir menembus bidang gambar menjauhi pembaca bersesuaian dengan sumbu z dengan demikian bersesuaian dengan vektor satuan k .

Contoh Truss Bidang:



Gambar 6. Contoh Truss Bidang Dengan Metode Vektor

Persamaan kesetimbangan untuk seluruh truss untuk mencari R_E dan R_{Cx} dan R_{Cy} :

$$\begin{aligned}\sum M_C &= 0 \\ &= (2000 \text{ lb}) (24 \text{ ft}) + (1000 \text{ lb}) (12 \text{ ft}) - R_E(6 \text{ ft}) \\ &\Rightarrow R_E = 10.000 \text{ lb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ &\Rightarrow R_{Cx} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \\ &= -2000 - 1000 + 10.000 + R_{Cy} \\ &\Rightarrow R_{Cy} = -7000 \text{ lb}\end{aligned}$$

JOINT A:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_{AB}\bar{e}_{AB} + F_{AD}\bar{e}_{AD} - 2000\bar{i} \\ &= F_{AB}(\bar{i}) + F_{AD}(0,6\bar{i} - 0,8\bar{j}) - 2000\bar{j} \\ &\equiv (F_{AB} + 0,6F_{AD})\bar{i} + (-0,8F_{AD} - 2000)\bar{j} = 0 \\ &\Rightarrow 0,8F_{AD} = -2000 ; F_{AD} = -2500\text{lb (2500 Compression)} \\ &\Rightarrow F_{AB} + 0,6(-2500) = 0 ; F_{AB} = 1500\text{lb Tension}\end{aligned}$$

JOINT D:

$$\begin{aligned}\sum F &= F_{AD}\bar{e}_{DA} + F_{BD}\bar{e}_{DB} + F_{DE}\bar{e}_{DE} \\ &= -2500(-0,6\bar{i} + 0,8\bar{j}) + F_{BD}(0,6\bar{i} + 0,8\bar{j}) + F_{DE}(\bar{i}) \\ &\equiv (1500 + 0,6F_{BD} + F_{DE})\bar{i} + (-2000 + 0,8F_{BD})\bar{j} = 0 \\ &\Rightarrow 0,8F_{BD} = 2000; F_{BD} = 2500\text{lb Tension} \\ &\Rightarrow 1500 + 1500 = -F_{DE} ; F_{DE} = -3000\text{lb (3000 Compression)}\end{aligned}$$

JOINT E:

$$\begin{aligned}\sum F &= 10.000\bar{i} + F_{DE}\bar{e}_{ED} + F_{BE}\bar{e}_{EB} + F_{CE}\bar{e}_{EC} \\ &= 10.000\bar{j} - 3000(-\bar{i}) + F_{BE}(-0,6\bar{i} + 0,8\bar{j}) + F_{CE}(0,6\bar{i} + 0,8\bar{j}) \\ &\equiv (3000 - 0,6F_{BE} + 0,6F_{CE})\bar{i} + (10.000 + 0,8F_{BE} + 0,8F_{CE})\bar{j} = 0 \\ &\Rightarrow F_{BE} - F_{CE} = 5000 \text{ lb} \\ &\Rightarrow F_{BE} + F_{CE} = -12.500 \Rightarrow F_{BE} = -3750\text{lb (3750 Compression)} \\ &\Rightarrow F_{CE} = -8750\text{lb (8750 Compression)}\end{aligned}$$

JOINT C:

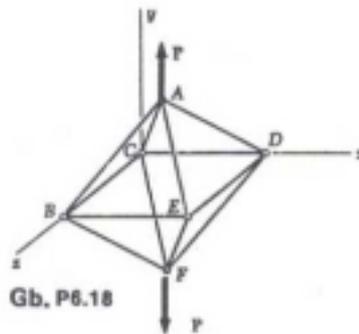
$$\sum F = -7000\bar{i} + F_{BC}\bar{e}_{CB} + F_{CE}\bar{e}_{CE}$$

$$\begin{aligned}
 &= -7000j + F_{BC}(-i) + F_{CE}(-0,6i - 0,8j) \\
 &\equiv (-F_{BC} - 0,6F_{CE})i + (-7000 - 0,8F_{CE})j = 0 \\
 &\Rightarrow F_{CE} = -8750\text{lb (8750 Compression)} \\
 &\Rightarrow F_{BC} = 5250\text{lb Tension}
 \end{aligned}$$

JOINT B (Check):

$$\begin{aligned}
 \Sigma F &= -1000j + F_{AB}\bar{e}_{BA} + F_{BD}\bar{e}_{BD} + F_{BE}\bar{e}_{BE} + F_{BC}\bar{e}_{BC} \\
 &= -1000j + 1500(-i) + 2500(-0,6i - 0,8j) - 3750(0,6i - 0,8j) + 5250(i) \\
 &= (1500 - 1500 - 2250 + 5250)i + (-1000 - 2000 + 3000)j \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Cara vektor akan semakin kelihatan keunggulannya jika digunakan untuk truss ruang. Berikut ditampilkan contoh penggunaan metode vektor untuk truss ruang.



Gambar 7. Contoh Penggunaan Metode Vektor Untuk Truss Ruang

Pada gambar ditunjukkan dua belas elemen batang masing-masing panjangnya L disambungkan membentuk oktahedron beraturan. Akan ditentukan gaya pada masing-masing elemen jika terdapat dua beban vertikal dengan besar P seperti terlihat pada gambar.

JOINT A:

$$\Sigma F = Pj + F_{AB}\bar{e}_{AB} + F_{AC}\bar{e}_{AC} + F_{AD}\bar{e}_{AD} + F_{AE}\bar{e}_{AE}$$

Dan dari kesimetrisan diketahui bahwa $F_{AB} = F_{AC} = F_{AD} = F_{AE} = F$

$$= Pj + F(-0,5i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j + 0,5k) + F(-0,5i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j - 0,5k) + F(0,5i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j - 0,5k)$$

$$\begin{aligned}
 &+ F(0,5i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j + 0,5k) \\
 &\equiv Pj + 0Fi - 2\sqrt{2}Fj + 0Fk = 0 \\
 &\Rightarrow F = \frac{1}{4}\sqrt{2} P
 \end{aligned}$$

Dengan mudah dipahami pula $F_{BF} = F_{CF} = F_{DF} = F_{EF} = \frac{1}{4}\sqrt{2} P$

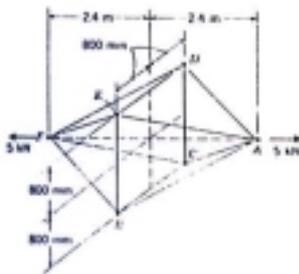
JOINT B:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F &= F_{AB}\bar{e}_{BA} + F_{BC}\bar{e}_{BC} + F_{BE}\bar{e}_{BE} + F_{BF}\bar{e}_{BF} \\
 &= \frac{1}{4}\sqrt{2} P (0,5i + \frac{1}{2}\sqrt{2}j - 0,5k) + F_{BC}(-k) + F_{BE}(i) + \frac{1}{4}\sqrt{2} P (0,5i - \frac{1}{2}\sqrt{2}j - 0,5k) \\
 &\equiv (0,125\sqrt{2} P + F_{BE} + 0,125\sqrt{2} P)i + (0,125\sqrt{2} P - 0,125\sqrt{2} P)k \\
 &\quad + (-0,125\sqrt{2} P - F_{BC} - 0,125\sqrt{2} P)k = 0 \\
 &\Rightarrow F_{BE} = F_{BC} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} P = \frac{1}{4}\sqrt{2} P \text{ (Compression)}
 \end{aligned}$$

Dengan meninjau joint D atau dengan kesimetrisan mudah dipahami bahwa $F_{CD} = F_{DE} = \frac{1}{4}\sqrt{2} P$ (Compression).

Soal – soal:

1. Selesaikan soal-soal pada bab 2 dengan metode vektor.
- 2.



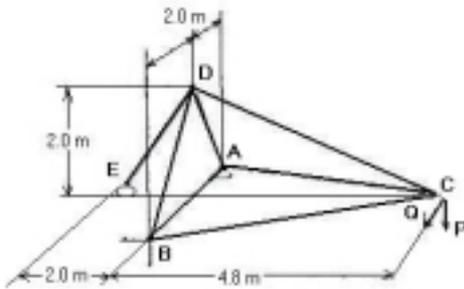
Tentukan gaya-gaya pada seluruh elemen dari truss ruang ketika mendapat gaya setimbang seperti ditunjukkan pada gambar.

Jawab:

$$F_{AB} = F_{AC} = F_{AD} = F_{AE} = F_{BF} = F_{CF} = F_{DF} = F_{EF} = 1,382 \text{ kN (Tarik).}$$

$$F_{BC} = F_{BE} = F_{CD} = F_{DE} = 0,8333 \text{ kN (Compressi)}$$

3.



Tentukan gaya-gaya pada semua elemen truss ruang seperti terlihat pada gambar, jika $P = 30\text{kN}$ dan $Q = 20\text{kN}$

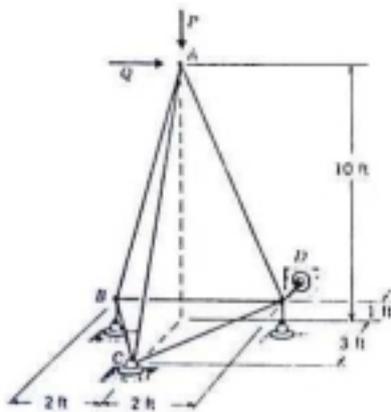
Jawab:

$$F_{AB} = 760\text{kN(T)}; F_{AC} = 13,0\text{kN(C)};$$

$$F_{AD} = F_{BD} = 72,1\text{kN(C)}; F_{BC} = 65,0\text{kN(C)};$$

$$F_{CD} = 78,0\text{kN(T)}; F_{DE} = 101,8\text{kN(T)}$$

4.



Tentukan gaya-gaya pada seluruh elemen dari truss ruang pada gambar jika $P = 4\text{kips}$ dan $Q = 3\text{kips}$.

Jawab:

$$F_{AB} = 6,15\text{kips(T)}; F_{AC} = 1,04\text{kips(C)}; F_{AD} = 9,22\text{kips(C)};$$

$$F_{BC} = 0,67\text{kips(C)}; F_{BD} = 0,90\text{kips(C)}; F_{CD} = 6,04\text{kips(T)}$$

BAB IV

TRUSS DENGAN METODE POTONGAN DAN METODE GRAFIS

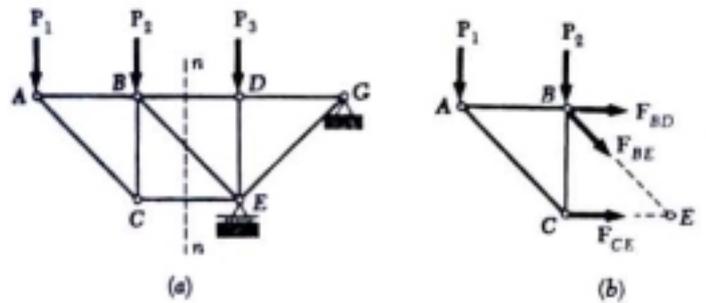
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Analisa dan tegangan pada truss dengan metode potongan, Penyelesaian dengan cara diagram: notasi *Bow*, penamaan *joint*, batang, gaya luar dan tegangan, pembuatan diagram Maxwell.

4.1 METODE POTONGAN.

Metode joint sangat efektif bila diinginkan gaya-gaya dalam semua bagian. Tetapi, bila hanya diinginkan gaya dalam satu atau beberapa bagian, metode potongan akan memberikan penyelesaian yang lebih cepat dan efisien.

Sebagai contoh, ingin diketahui gaya dalam elemen BD dari truss yang diperlihatkan pada gambar 8. Bila menggunakan metode joint tentu akan dipilih joint B atau D sebagai benda bebas. Tetapi, sebenarnya dapat juga dipilih sebagai benda bebas bagian yang lebih luas dari truss, terdiri dari beberapa joint dan elemen; asalkan gaya yang diinginkan adalah satu di antara gaya luar yang beraksi pada bagian tersebut. Jika sebagian dari truss dipilih sedemikian hingga secara total hanya ada tiga gaya yang tidak diketahui, gaya yang diinginkan dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan kesetimbangan bagi sebagian penunjang. Dalam prakteknya, sebagian dari truss yang dianalisa sebagai benda bebas diperoleh dengan melewati garis potongan melalui tiga elemen truss, salah satunya adalah bagian yang diinginkan.



Gambar 8. Metode Potongan

Dalam gambar garis pemotong dilewatkan melalui BD, BE dan CE dan potongan ABC dari truss dipilih sebagai benda bebas (catatan: jika pada benda bebas tersebut terdapat gaya reaksi, maka gaya reaksi harus dicari terlebih dahulu sebagai komponen gaya luar). Gaya luar yang beraksi pada benda bebas adalah P_1 dan P_2 pada titik A dan B dan tiga gaya yang belum diketahui besarnya F_{BD} , F_{BE} dan F_{CE} . Karena belum diketahui elemen-elemen tersebut dalam keadaan tarik atau tekan, tiga gaya digambarkan sekehendak dari benda bebas dan seolah-olah bagian itu dalam keadaan tarik.

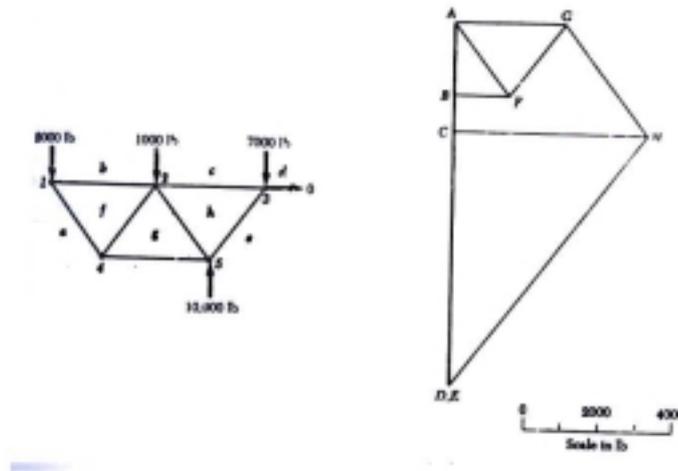
Kenyataan bahwa benda tegar ABC dari truss dalam kesetimbangan dapat ditunjukkan dengan menulis tiga persamaan kesetimbangan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan tiga gaya yang tidak diketahui. Jika hanya gaya F_{BD} yang dicari, hanya cukup digunakan satu persamaan, asal persamaan tidak terdiri dari dua gaya lain yang tidak diketahui; maka persamaan $\Sigma M_E = 0$ memberikan nilai besarnya F_{BD} . Tanda positif dalam jawaban menunjukkan asumsi tentang arah F_{BD} adalah benar dan elemen BD dalam keadaan tarik; tanda negatif akan menunjukkan asumsi tentang arah F_{BD} salah dan elemen BD dalam keadaan tekan. Dengan cara yang sama jika dicari F_{CE} maka digunakan persamaan $\Sigma M_B = 0$, dan persamaan $\Sigma F_y = 0$ digunakan untuk mencari F_{BE} .

Bilamana hanya gaya dalam satu elemen saja yang ditentukan, tidak terdapat pengecekan beban dari perhitungan yang dilakukan. Namun, bilamana semua gaya yang tidak diketahui pada benda bebas harus ditentukan, perhitungan dapat dicek dengan menulis tambahan persamaan. Sebagai misal, jika F_{BD} , F_{BE} dan F_{CE} yang ditentukan, perhitungan dapat dicek benar tidaknya dengan membuktikan apakah $\Sigma F_x = 0$.

4.2 METODE GRAFIS: diagram Maxwell.

Metode joint dapat dipakai sebagai dasar untuk mengembangkan analisa truss dengan metode grafis. Banyaknya garis yang telah digambarkan dapat direduksi jika berbagai segi banya gaya disuperposisikan. Diagram yang dihasilkan dikenal sebagai diagram Maxwell dari truss. Ada beberapa aturan yang harus dipatuhi untuk memperoleh diagram Maxwell. Aturan-aturan tersebut biasa disebut dengan notasi *Bow*.

1. Seluruh gaya luar yang beraksi, baik itu aksi maupun reaksi digambarkan.
2. Huruf kecil dipakai untuk menandai setiap daerah di luar truss bergerak menurut jarum jam mengelilingi trus, demikian juga untuk setiap daerah didalam truss.
3. *Elemen*. Elemen diberi spesisifikasi dengan mengambil nama huruf dari dua daerah yang bersebelahan.

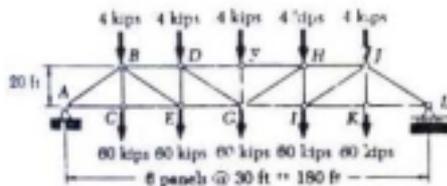


Gambar 9. Diagram Maxwell

4. *Beban.* Beban diberi spesifikasi dengan membaca dalam arah jarum jam huruf dari dua daerah yang bersebelahan dengan beban itu. Nama beban ditulis dengan huruf besar dan diberi tanda anak panah.
⇒ Dengan memilih gaya eksternal dalam urutan menurut arah jarum jam mengelilingi trus, digambarkan menurut skalanya segi banyak gaya luar dan jumlahnya secara vector harus sama dengan nol.
5. *Gaya yang ditimbulkan elemen pada pin.* Seperti telah diuraikan, gaya yang ditimbulkan oleh elemen pada dua pin yang dihubungkan harus berarah sepanjang elemen itu dan sama besar dan berlawanan arah. Dalam membahas aksi dari elemen pada salah satu joint, tanda (+/- , tarik/tekan) diberikan dengan membaca huruf yang bersebelahan dengan elemen dalam *arah jarum jam* terhadap joint yang bersangkutan.
⇒ Segi banyak gaya digambarkan untuk masing-masing joint dengan memperlakukannya berturutan joint yang mengalami hanya dua aksi yang tidak diketahui. Semua garis yang telah digambarkan sebelumnya dapat dipakai, jadi hanya diperlukan dua garis tambahan untuk melengkapi masing-masing segibanyak gaya yang baru.

Soal-soal:

1. Tentukan diagram Maxwell untuk soal-soal pada bab 2, dan periksa berdasar hasil yang telah didapat pada bab 2 tersebut.
- 2.

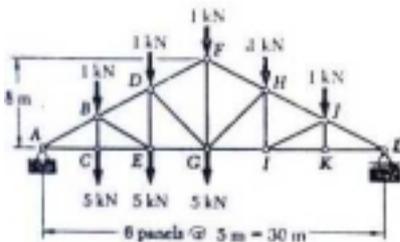


Tentukan gaya-gaya dalam elemen DE dan HJ dari truss yang diperlihatkan pada gambar.

Jawab:

$$F_{DE} = 36 \text{ kips C}; F_{HJ} = 384 \text{ kips C}$$

- 3.



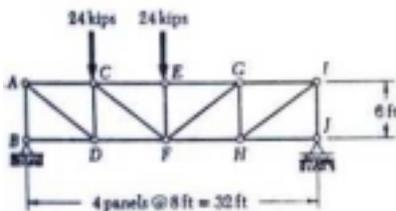
Tentukan gaya-gaya dalam elemen FH, GH dan GI dari truss atap yang diperlihatkan pada gambar.

Jawab:

$$F_{FH} = 13,82 \text{ kN C}; F_{GH} = 1,372 \text{ kN C}$$

$$F_{GI} = 13,13 \text{ kN T}$$

- 4.



Tentukan gaya dalam elemen CE dan CF dari truss yang diperlihatkan pada gambar.

Jawab:

$$F_{CE} = 48 \text{ kips C.}$$

$$F_{CF} = 10 \text{ kips T.}$$

BAB V

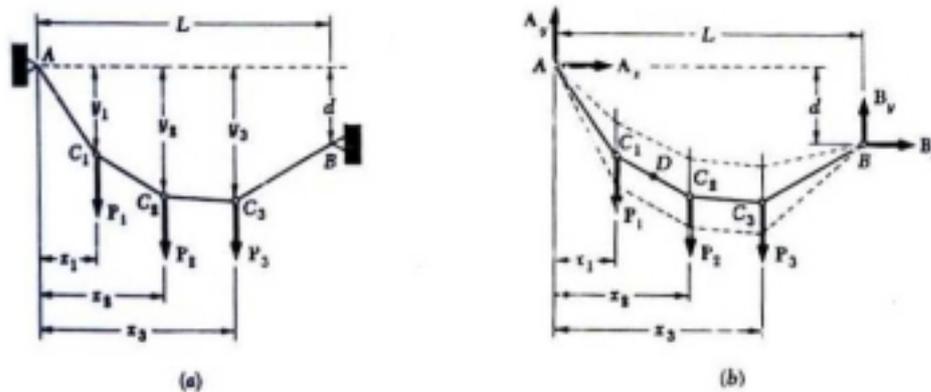
KABEL DENGAN BEBAN TERPUSAT DAN KABEL PARABOLA

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Definisi kabel dengan beban terpusat sebagai konstruksi statis tertentu, Analisa gaya dan tegangan pada kabel dengan beban terpusat, Definisi kabel parabola sebagai konstruksi statis tertentu, Analisa gaya dan tegangan pada kabel parabola.

5.1 Kabel Dengan Beban Terkonsentrasi.

Kabel banyak digunakan dalam aplikasi teknik, seperti halnya jembatan gantung, kawat tali untuk menara tinggi dan sebagainya. Secara umum kabel dapat dibagi dua, yakni kabel dengan beban terkonsentrasi dan kabel dengan beban terdistribusi. Pada bagian ini akan dibahas bagian pertama.



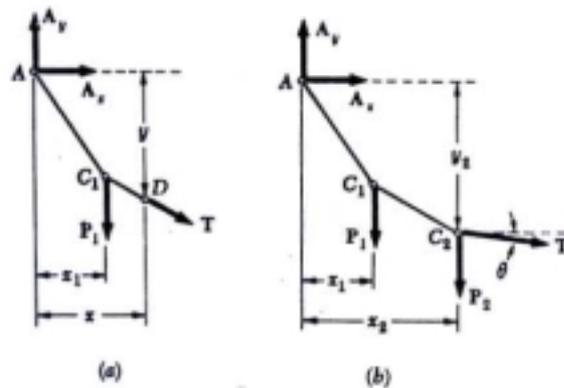
Gambar 10. Kabel Dengan Beban Terkonsentrasi

Pada gambar 10 terlihat kabel yang dikaitkan pada suatu titik A dan B tertentu dan menunjang beban terkonsentrasi P_1, P_2 dan P_3 . Diandaikan kabel tersebut lentur, yaitu tahanan terhadap pelengkungan kecil dan dapat diabaikan. Juga berat kabel dapat diabaikan dibanding

beban yang ditunjangnya. Karena itu tiap sub-bagian kabel antara kabel yang berturutan boleh dianggap sebagai bagian dua-gaya, dan gaya internal pada tiap titik dalam kabel tereduksi menjadi gaya *tegangan yang berarah sepanjang kabel*.

Diandaikan bahwa tiap beban terletak pada garis vertical yang diberikan, berarti bahwa jarak horizontal dan vertikal antara dua titik tunjang diketahui. Diusulkan untuk menentukan bentuk dari kabel, artinya, jarak vertical dari A pada titik-titik C_1, C_2, C_3 dan juga tegangan T dalam tiap sub bagian dai kabel dianggap tertentu.

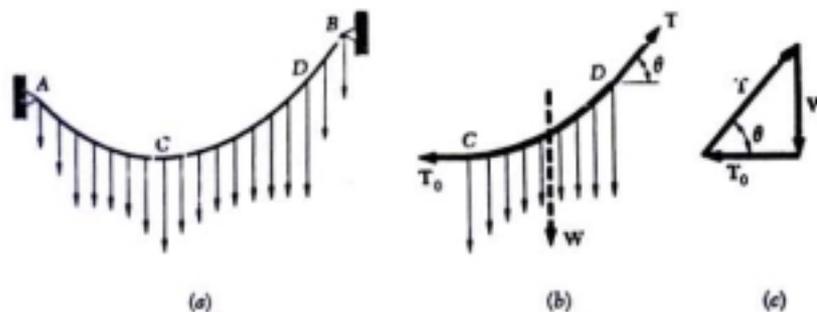
Pertama, digambar diagram benda bebas dari keseluruhan kabel. Karena kemiringan dari sub-bagian kabel yang dikaitkan pada A dan B tidak diketahui, reaksi pada A dan B harus diwakili masing-masing oleh dua komponen A_x dan A_y serta B_x dan B_y . Demikianlah, karena terdapat empat nilai yang tak diketahui maka tiga persamaan kesetimbangan yang ada tidaklah mencukupi untuk menentukan reaksi-reaksi itu. (Jelas, kabel bukan benda tegar; karena itu persamaan kesetimbangan yang dikemukakan *perlu tetapi bukan kondisi yang cukup*). Karenanya harus dicari persamaan tambahan dengan meninjau kesetimbangan dari sub-bagian kabel. Ini mungkin apabila diketahui koordinat x dan y dari sembarang titik D pada kabel. Dengan menggambar diagram benda bebas dari sub-bagian pada kabel AD dan menulis $\sum M_D = 0$, didapatkan hubungan tambahan antara komponen scalar A_x dan A_y dan dapat ditentukan reaksi pada A dan B. Namun persoalan akan menjadi *statik tak tentu* apabila tidak diketahui koordinat titik D, kecuali hubungan antara A_x dan A_y (atau antara B_x dan B_y) diberikan. Kabel dapat tergantung dalam berbagai variasi yang mungkin, sebagaimana ditunjukkan oleh garis putus-putus dalam gambar 10.



Gambar 11. Diagram Benda Bebas Sub-Bagian Kabel

Sekali A_x dan A_y dapat ditentukan, jarak vertical dari A pada tiap titik manapun dari kabel dapat dengan mudah ditemukan. Dengan memperhatikan titik C_2 misalnya, dapat digambar diagram benda bebas dari sub-bagian kabel AC_2 . Dengan menuliskan $M_{C_2} = 0$ didapat satu persamaan yang dapat diselesaikan untuk y_2 . Dengan menulis $\sum F_x = 0$ dan $\sum F_y = 0$ diperoleh komponen dari gaya T yang mewakili tegangan dalam sub bagian kabel disebelah kanan dari C_2 . Dapat diamati bahwa $T \cos\theta = -A_x$; *komponen horizontal dari gaya tegangan adalah sama pada titik manapun dari kabel*. Kesimpulannya ialah tegangan T maksimum bila $\cos\theta$ minimum, berarti dalam sub bagian kabel yang mempunyai sudut inklinasi θ terbesar. Jelaslah, sub-bagian kabel ini harus berdekatan dengan satu dari dua penunjang kabel.

5.2 Kabel Dengan Beban Terdistribusi.



Gambar 12. Kabel Dengan Beban Terdistribusi

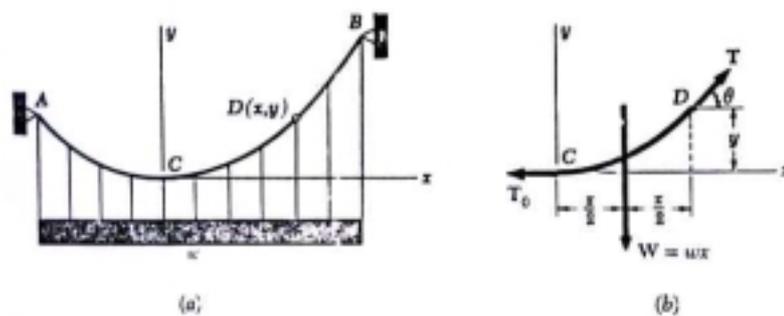
Pada gambar 12 diperlihatkan seutas kabel dikaitkan pada dua titik tertentu A dan B dan membawa beban terdistribusi. Pada bagian kabel dengan beban terkonsentrai, gaya internal pada tiap titik adalah suatu gaya tegangan yang berarah sepanjang kabel. Dalam kasus kabel membawa suatu beban terdistribusi, kabel menggantung dalam bentuk kurva, dan gaya internal pada titik D adalah gaya tegangan T yang *berarah sepanjang garis singgung dari kurva*. Jika diberikan beban terdistribusi tertentu, dapat diusulkan dalam bagian ini untuk menentukan tegangan pada tiap titik dari kabel. Dapat juga dilihat nantinya, bagaimana bentuk kabel dapat ditentukan untuk dua jenis beban terdistribusi yang istimewa (parabola dan katenary).

Dengan memperhatikan kasus sangat umum dari beban terdistribusi, digambar diagram benda bebas dari sub-bagian kabel memanjang dari titik terendah C ke titik yang diberikan D dari kabel itu. Gaya yang bereaksi pada benda bebas adalah gaya tegangan T_0 pada C yang horizontal, dan tegangan T pada D, berarah sepanjang garis singgung pada kabel di D, dan resultan W dari beban terdistribusi yang ditunjang oleh sub-bagian dari kabel CD. Dengan menggambar gaya yang bersesuaian dalam segitiga, didapat hubungan berikut:

$$T \cos \theta = T_0 \qquad T \sin \theta = W$$

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \qquad \tan \theta = W/T_0$$

5.3 Kabel Parabola.



Gambar 13. Kabel Parabola.

Diandaikan, bahwa kabel AB membawa satu beban yang *terdistribusi rata sepanjang sumbu horizontal*. Kabel dari jembatan gantung dapat diumpamakan dibebani seperti itu, karena berat dari kabel kecil disbanding dengan berat jalan lalu lintas. Beban dinyatakan dengan w beban persatuan panjang (diukur horizontal) dan dinyatakan dalam N/m atau dengan lb/ft. Dipilih arah koordinat dengan titik nol pada titik terendah C pada kabel, didapatkan besarnya W dari beban total yang dipikul bagian kabel memanjang dari C ke titik D yang berkoordinat x dan y ialah $W = wx$. Sehingga:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2} \quad \text{dan} \quad \tan \theta = \frac{wx}{T_0}$$

Lebih lanjut, jarak dari D ke garis aksi dari resultan W adalah sama dengan setengah jarak horizontal dari D ke D. Jumlah momen pada D, dapat ditulis:

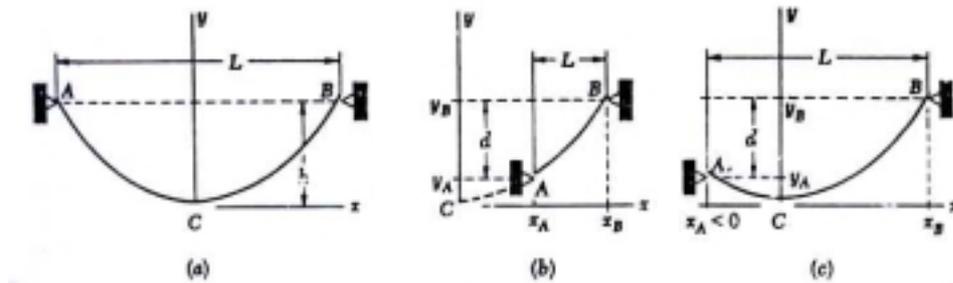
$$\sum M_D = 0 \quad wx \frac{x}{2} - T_0 y = 0$$

$$y = \frac{wx^2}{2T_0}$$

Ini adalah persamaan sebuah parabola dengan poros vertical dan ujung sudutnya pada titik asal dari koordinat. Kurva yang dibentuk oleh kabel dengan beban terdistribusi rata sepanjang sumbu horizontal dengan demikian adalah parabola.

Jika penunjang A dan B dari kabel mempunyai elevasi yang sama, maka biasanya jarak L diantara penunjang disebut rentangan dari kabel dan jarak vertical h dari penunjang ke titik terendah disebut lendutan (*sag*). Jika rentangan dan lendutan dari kabel diketahui, dan jika beban w persatuan panjang horizontal diberikan, tegangan minimum T_0 dapat

diperoleh dengan mengganti $x = L/2$ dan $y = h$. Dan tegangan diseluruh kabel dapat ditentukan dengan persamaan $T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2}$.



Gambar 14. Kasus Kabel Parabola

Jika penunjang mempunyai elevasi berbeda, posisi dari titik terendah kabel tidak diketahui dan koordinat x_A, y_A dan x_B, y_B dari penunjang harus ditentukan. Sampai saat ini, dapat dikatakan bahwa koordinat dari A dan B memenuhi persamaan parabola dan bahwa:

$$x_B - x_A = L \quad \text{dan} \quad y_B - y_A = d$$

dengan L dan d menyatakan jarak horizontal dan vertical diantara dua penunjang.

Panjang kabel diukur dari titik terendah C hingga penunjang B dapat diperoleh dari rumus:

$$s_B = \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

dari persamaan parabola didapat $dy/dx = wx/T_0$; dan dengan substitusi kedalam persamaan diatas dan menggunakan teori binomial untuk menguraikan deret tak terhingga diperoleh:

$$\begin{aligned} s_B &= \int_0^{x_B} \sqrt{1 + \frac{w^2 x^2}{T_0^2}} dx \\ &= \int_0^{x_B} \left(1 + \frac{w^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{w^4 x^4}{8T_0^4} + \dots \right) dx \end{aligned}$$

$$= x_B \left(1 + \frac{w^2 x_B^2}{6T_0^2} - \frac{w^4 x_B^4}{40T_0^4} + \dots \right)$$

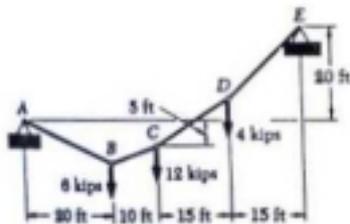
dan karena $w x_B^2 / 2T_0 = y_B$,

$$= x_B \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{y_B}{x_B} \right)^4 + \dots \right)$$

deret menuju satu harga untuk rasio y_B/x_B kurang dari 0,3; dalam banyak hal rasio ini jauh lebih kecil, dan hanya perlu dua suku pertama dari deret yang diperhitungkan.

Soal-soal:

1.



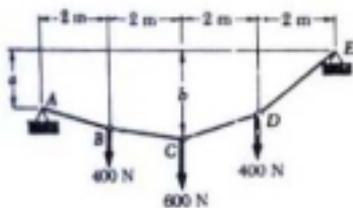
Kabel AE menunjang tiga beban vertical dari titik yang ditandai. Jika titik C adalah 5 ft di bawah penunjang kiri, tentukan a) elevasi dari titik B dan D. b) Kemiringan maksimum dan tegangan maksimum.

Jawab:

a) $y_B = 5,56\text{ft}$ dibawah A dan $y_D = 5,83$ diatas A

b) $\theta = 43,4^\circ$ dan $T_{\max} = 24,8$ kips

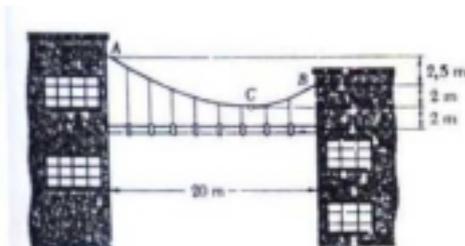
2.



Tentukan jarak a jika bagian BC dari kabel horizontal dan jika tegangan maksimum dalam kabel 2600N.

Jawab: 1m

3.



Sebatang pipa uap mempunyai massa persatuan panjang 70 kg/m. Pipa tersebut melalui antara dua bangunan gedung berjarak 20m dan ditunjang oleh system kabel

seperti terlihat pada gambar. Andaikan system kabel menyebabkan pembebanan serbasama yang mempunyai massa 5 kg/m persatuan panjang horizontal, tentukan lokasi titik C yang terendah dari kabel itu dan tegangan kabel maksimum.

Jawab: 8m disebelah kiri B; 14,72N

4. Pusat rentangan suatu jembatan terdiri atas jalan raya yang digantung oleh 4 kabel. Beban serba sama yang ditunjang kabel adalah $W = 9,75$ kips/ft sepanjang horizontal. Diketahui bahwa rentang L adalah 3500 ft dan lendutan h adalah 316 ft, tentukan panjang tiap kabel yang digunakan.

jawab: 3575 ft.

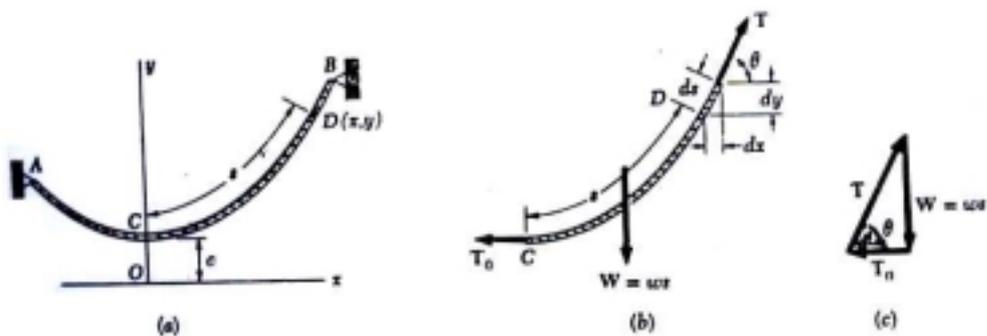
BAB VI

KATENARI

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Definisi kabel *katenary*, Analisa gaya dan tegangan pada kabel *katenary*

Katenari adalah suatu kabel AB membawa beban terdistribusi serbasama sepanjang kabel itu sendiri (gambar 15).



Gambar 15. Model Kabel Katenari.

Beban persatuan panjang (diukur sepanjang kabel) ditandai dengan w dalam N/m atau dalam lb/ft. Besar W dari beban total dibawa oleh sub-bagian kabel dengan panjang s memanjang dari titik terendah C ke titik D sembarang adalah $W = w \cdot s$. Sehingga berlaku:

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

Untuk menyederhanakan perhitungan, dikenalkan konstanta $c = T_0/w$. Sehingga:

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = w\sqrt{c^2 + s^2}$$

Diagram benda bebas dari sub-bagian kabel CD diperlihatkan dalam gambar 15. Namun diagram ini tidak dapat digunakan secara langsung untuk memperoleh persamaan dari kurva dibentuk oleh kabel karena tidak diketahui jarak horizontal dari D ke garis aksi dari resultan beban W . Untuk mendapatkan persamaan tersebut, pertama-kali ditulis proyeksi

horizontal dari suatu elemen kabel dengan panjang ds adalah $dx = ds \cos\theta$. Dari gambar 15 terlihat $\cos\theta = T_0/T$ sehingga:

$$dx = ds \cos\theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{wc}{w\sqrt{c^2 + s^2}} ds = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2 / c^2}}$$

$$x = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2 / c^2}} = c \left| \sin^{-1} \frac{s}{c} \right|_0^s = c \sin^{-1} \frac{s}{c}$$

$$s = c \sinh \frac{x}{c}$$

Hubungan antara koordinat x dan y sekarang dapat diperoleh dengan menulis $dy = dx \tan\theta$. Dengan memperhatikan gambar 15, didapat $\tan\theta = W/T_0$ sehingga:

$$dy = dx \tan\theta = \frac{W}{T_0} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh \frac{x}{c} dx$$

Integrasi dari C (0,c) ke D (x,y) diperoleh:

$$y - c = \int_0^x \sinh \frac{x}{c} dx = c \left| \cosh \frac{x}{c} \right|_0^x = c \left(\cosh \frac{x}{c} - 1 \right)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Ini merupakan persamaan untuk katenari poros vertical. Ordinat c dari titik terendah C disebut *parameter* dari katenari. Dengan memperhatikan persamaan-persamaan diatas:

$$y^2 - s^2 = c^2$$

$$T_0 = wc \quad W = ws \quad T = wy$$

Hubungan terakhir menunjukkan bahwa tegangan pada tiap titik D dari kabel adalah berbanding lurus dengan jarak vertika D kerentang horizontal mewakili poros X.

Bilamana penunjang A dan B dari kabel mempunyai elevasi sama, jarak L di antara penunjang disebut *rentangan* kabel dan jarak vertika h dari penunjang dari titik terendah C disebut lendutan kabel. Definisi ini sama dengan yang diberikan dalam kasus parabola, tetapi harus diingat bahwa karena dipilih koordinat poros, lendutan h sekarang adalah:

$$h = y_A - c$$

Harus diperhatikan bahwa soal katenari tertentu melibatkan persamaan transcendental yang harus diselesaikan secara iterasi. Namun bila kabel benar-benar kencang, beban dapatlah diduga terbagai *serbasama sepanjang horizontal* dan katenari dapat diganti dengan suatu parabola. Penyelesaian soal menjadi sangat sederhana, sementara kesalahan yang mungkin timbul diperkecil.

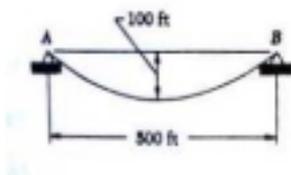
Bilamana A dan B mempunyai elevasi berbeda, posisi titik terendah kabel tidak diketahui. Soal kemudian dapat diselesaikan dengan suatu aturan yang hampir sama dengan yang ditunjukkan dalam kabel parabola, dengan mengemukakan bahwa kabel harus melewati penunjang dan bahwa

$$x_B - x_A = L, y_B - y_A = d$$

di mana L dan d menunjukkan jarak horizontal dan vertical diantara dua penunjang.

Soal-soal:

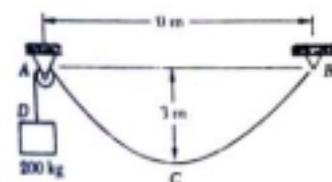
1.



Suatu kabel yang beratnya 3 lb/ft digantungkan antara dua titik A dan B sebagaimana terlihat pada gambar. Tentukan: a) nilai maksimum dan minimum tegangan dalam kabel. b) panjang kabel.

Jawab: a) $T_{\min} = 984$ lb; $T_{\max} = 1284$ lb; b) $s_{AB} = 550$ ft.

2.

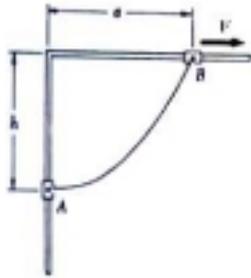


Suatu pemberat dengan massa 200kg dikaitkan pada kabel yang lewat di atas katrol kecil pada A dan dikaitkan dengan penunjang pada B. Jika lendutan adalah 3m,

tentukan a) panjang kabel dari A ke B, b) massa per satuan panjang kabel. Abaikan massa kabel dari A ke D.

Jawab: a) 11,27m b) 29,5 kg/m

3.



Kabel AB 10 ft, berat 20 lb dihubungkan dengan dua kerah pada A dan B yang dapat meluncur bebas pada tongkat seperti terlihat pada gambar. Abaikan berat kerah, tentukan a) besar gaya horizontal F sedemikian hingga $h = a$. b) nilai h dan a . c) tegangan maksimum dalam kabel.

jawab: a) 8,28 lb. b) 6,69 ft c) 96,3N

BAB VII

TITIK PUSAT MASSA LUASAN DAN GARIS

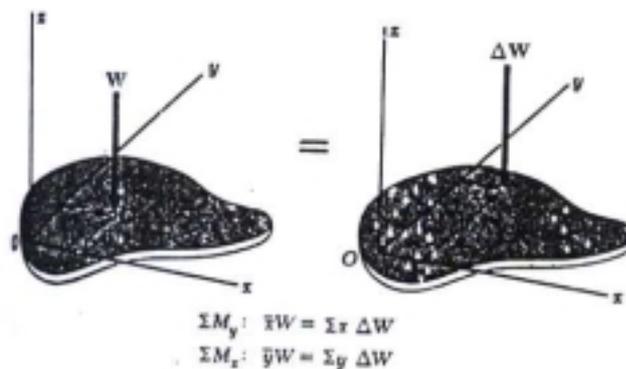
TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Analisa kesetimbangan gaya pada bidang, Titik pusat masa luasan sederhana, Titik pusat masa garis, Titik pusat masa luasan yang terdiri atas luasan-luasan sederhana, Titik pusat garis yang terdiri dari kontu sederhana.

7.1 LUASAN

Dalam hal gaya luar yang bekerja pada benda dalam bentuk *body force*, semisal gaya gravitasi, gaya tersebut bekerja pada masing-masing partikel. Demi kemudahan analisa biasanya gaya-gaya tersebut diwakili sebuah gaya tunggal. Perhatikan keping horizontal datar pada gambar 16. Koordinat partikel pertama diberi tanda x_1, y_1 , koordinat partikel kedua x_2, y_2 ... x_n, y_n . Gaya yang ditimbulkan oleh bumi pada partikel-partikel tersebut adalah dw_1, dw_2, \dots, dw_n . Gaya ini menuju pusat bumi, namun untuk pemakaian praktis gaya-gaya ini dapat dianggap sejajar. Dan berlaku persamaan-persamaan berikut ini:

$$\sum F_z = W = dw_1 + dw_2 + \dots + dw_n$$



Gambar 16. Pusat Gravitasi Keping.

Untuk memperoleh koordinat titik tangkap $W(\bar{x}, \bar{y})$ dilakukan pertimbangan momen yang ditimbulkan oleh gaya W terhadap sembarang sumbu yang dipilih harus sama dengan momen yang ditimbulkan oleh partikel-partikel.

$$\sum M_y : W \bar{x} = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$$

$$\sum M_x : W \bar{y} = w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_n y_n$$

atau ditulis dalam bentuk integral:

$$W \bar{x} = \int_1^n x dw \quad W \bar{y} = \int_1^n y dw$$

Dalam kasus keping homogen dengan tebal sama, besar gaya berat W dari suatu partikel dapat dinyatakan dengan :

$$W = \gamma A t$$

dengan γ = berat spesifik. Sehingga diperoleh

$$\sum M_y : \gamma A t \bar{x} = \gamma A_1 t_1 x_1 + \gamma A_2 t_2 x_2 + \dots + \gamma A_n t_n x_n$$

$$\sum M_x : \gamma A t \bar{y} = \gamma A_1 t_1 y_1 + \gamma A_2 t_2 y_2 + \dots + \gamma A_n t_n y_n$$

atau bila disederhanakan :

$$\sum M_y : A \bar{x} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$$

$$\sum M_x : A \bar{y} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$$

atau ditulis dalam bentuk integral:

$$A \bar{x} = \int_1^n x dA \quad A \bar{y} = \int_1^n y dA$$

Persamaan ini mendefinisikan koordinat pusat gravitasi dari keping homogen. Titik \bar{x}, \bar{y} juga dikenal sebagai *titik-berat* C dari bidang keping dengan luas A . Jika kepingnya tidak homogen, persamaan itu tidak bisa dipakai untuk menentukan pusat gravitasi dari keping; walaupun demikian titik itu tetap didefinisikan sebagai titik-berat bidang. Integral $\int x dA$ dikenal sebagai *momen pertama bidang A terhadap sumbu y* .

Demikian juga, integral $\int y dA$ mendefinisikan *momen pertama bidang A*

terhadap sumbu x . Dapat dilihat dari persamaan-persamaan di atas, bahwa jika titik berat bidang terletak pada sumbu koordinat, maka momen pertama bidang terhadap sumbu itu nol.

7.2 GARIS

Dalam kasus kawat homogen yang berpenampang serbasama, besa W dari berat elemen kawat dinyatakan sebagai:

$$W = \gamma a dL$$

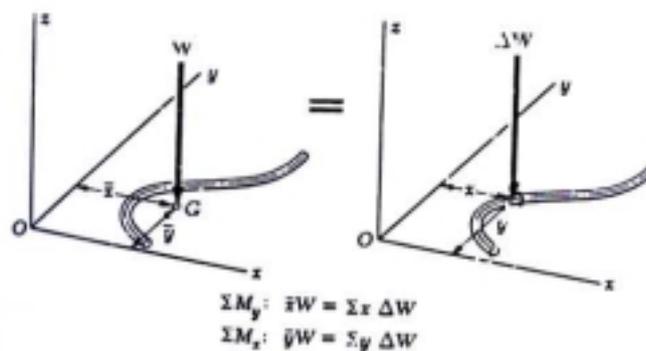
dimana a = luas penampang kawat dan dL adalah panjang elemen kawat.

Pusat gravitasi kawat akan berimpit dengan titik-berat C dari garis L yang mendefinisikan bentuk kawat. Koordinat \bar{x} dan \bar{y} dari titik-berat garis L diperoleh dari persamaan:

$$\bar{x}L = \int x dL \qquad \bar{y}L = \int y dL$$

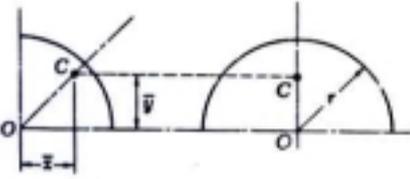
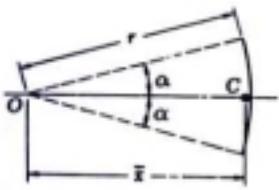
Biasanya elemen dL lebih mudah bila diganti dengan salah satu dari rumusan-rumusan berikut ini:

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \qquad ; dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \qquad ; dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

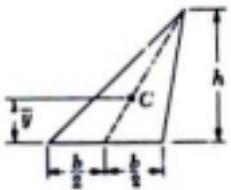
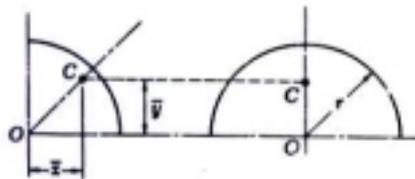
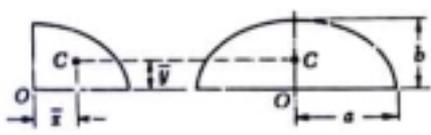
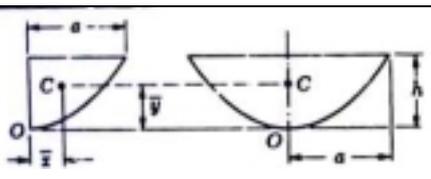


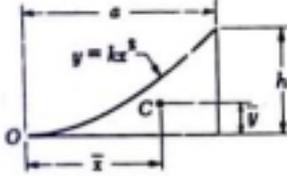
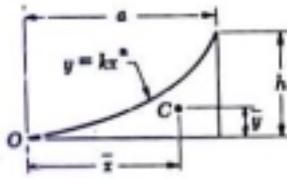
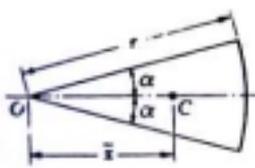
Gambar 17. Pusat Gravitasi Kawat.

Berikut ini ditampilkan titik berat dari luasan-luasan dan garis-garis sederhana:

Shape		\bar{x}	\bar{y}	Length
Quarter-circular arc		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arc of circle		$\frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Gambar 18. Titik Berat Bentuk Garis Yang Biasa Dijumpai.

Shape		\bar{x}	\bar{y}	Area
Triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$

Parabolic area		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Parabolic spandrel		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
General spandrel		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}$	$\frac{ah}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r \cdot \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Gambar 18. Titik Berat Bentuk Luasan Yang Biasa Dijumpai.

7.3 Keping dan Kawat Komposit

Dalam banyak hal, keping datar ataupun kawat tersusun atas bentuk sederhana seperti yang tampak pada gambar 17 dan 18. Absis \bar{X} dari titik gravitasi G dapat ditentukan dari absis $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$ dari pusat gravitasi berbagai bagian dengan menyatakan momen berat seluruh keping terhadap sumbu y sama dengan jumlah momen berat berbagai bagian terhadap sumbu yang sama. Ordinat \bar{Y} dari pusat gravitasi keping diperoleh dengan cara serupa dengan menyamakan momen terhadap sumbu x.

$$\Sigma M_y: \quad \bar{X}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{Y}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n$$

Jika keping itu homogen dan tebalnya serbasama, pusat gravitasi berimpit dengan titik-berat C dari bidang tersebut. Absis \bar{X} dari titik-berat bidang itu dapat ditentukan dengan menyatakan momen pertama dari

bidang komposit terhadap sumbu y sama dengan jumlah momen pertama bidang-bidang sederhana terhadap sumbu yang sama. Ordinat \bar{Y} dari titik-berat diperoleh dengan cara yang serupa, dengan menyamakan momen pertama bidang-bidang itu terhadap sumbu x.

$$\sum M_y: \quad \bar{X}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \dots + \bar{x}_n A_n$$

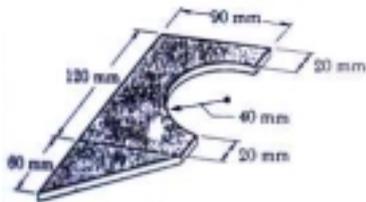
$$\sum M_x: \quad \bar{Y}(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \dots + \bar{y}_n A_n$$

Kewaspadaan harus diambil untuk mencatat momen untuk masing-masing bidang dengan tanda yang benar. Momen pertama suatu bidang, seperti juga momen gaya, dapat positif atau negatif. Sebagai contoh, suatu bidang yang titik beratnya terletak di sebelah kiri sumbu y akan mempunyai momen pertama yang negatif terhadap sumbu itu. Demikian juga lubang harus diberi tanda negatif.

Dengan cara serupa, dalam banyak kasus dapat ditentukan pusat gravitasi kawat komposit atau titik berat garis komposit dengan membagi-bagi kawat atau garis itu menjadi elemen yang lebih sederhana.

Soal – soal:

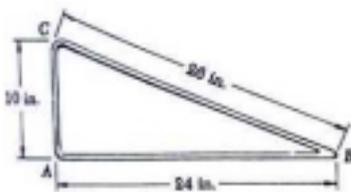
1)



Tentukan koordinat pusat gravitasi keping tipis homogen seperti terlihat pada gambar. Pilih sumbu koordinat pada ujung bangun segitiga, dan sisi 180mm sebagai sumbu y.

Jawab: (34,9mm ; 100,4mm)

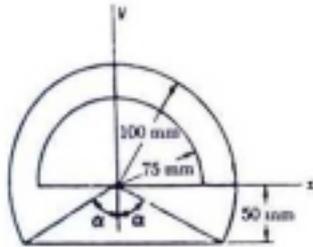
2.



Bentuk yang tergambar terbuat dari kawat homogen. Tentukan pusat gravitasinya. Pilih sumbu koordinat pada titik A, dengan AB berimpit dengan sumbu x.

Jawab : (10";3")

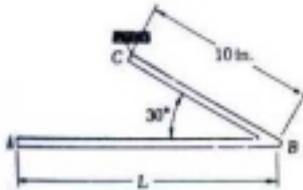
3.



Tentukan titik berat bidang yang tergambar.

Jawab : (0 ; 9,26mm)

4.



Kawat homogen ABC dibengkokkan seperti tergambar dan ditahan oleh engsel di C.

Tentukan panjang L supaya bagian BC dari kawat itu horizontal.

Jawab: 27,3 in.

BAB VIII

TITIK BERAT VOLUME

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Analisa kesetimbangan gaya pada ruang, Titik pusat massa volum bangun sederhana, Titik berat volum bangun yang terdiri atas banaan-banaan sederhana.

8.1 Pusat Gravitasi Benda Tiga Dimensi. Titik Berat Volume

Pusat gravitasi B suatu benda tiga dimensi diperoleh dengan membagi-bagi benda itu menjadi elemen kecil dan menyatakan berat W benda pada G ekuivalen dengan sistem gaya terdistribusi dw yang menyatakan berat elemen-elemen kecil. Atau dalam bentuk persamaan matematis:

$$\bar{x}W = \int xdw \qquad \bar{y}W = \int ydw \qquad \bar{z}W = \int zdw$$

Jika benda itu terbuat dari bahan yang homogen yang sama berat jenisnya γ , besar dw dari elemen kecil itu dapat dinyatakan dengan volume dv dari elemen yang bersangkutan, dan besar W dari berat total dapat dinyatakan dengan volumen total V . Atau ditulis:

$$dw = \gamma dv \qquad W = \gamma V$$

sehingga diperoleh:

$$\bar{x}V = \int xdv \qquad \bar{y}V = \int ydv \qquad \bar{z}V = \int zdv$$

Titik C yang berkoordinat $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ dikenal juga sebagai titik-berat C dari volume V benda tersebut. Jika bendanya tidak homogen, persamaan tersebut tidak bisa dipakai untuk menentukan pusat gravitasi benda, namun persamaan tersebut tetap mendefinisikan titik-berat volumenya.

Integral $\int xdv$ dikenal sebagai *momen pertama volume terhadap bidang yz* . Demikian juga integral $\int ydv$ dan $\int zdv$, mendefinisikan momen pertama volume terhadap bidang zx dan bidang xy . Dari persamaan tersebut dapat dilihat bahwa jika titik-berat volume terletak pada bidang

koordinat, maka momen pertama volume itu terhadap bidang itu menjadi nol.

Volume dikatakan simetris terhadap bidang yang diketahui jika untuk setiap titik P dari volume itu terdapat titik P' dari volume yang sama sedemikian sehingga garis PP' tegak lurus pada bidang tersebut dan terbagi dua sama besar oleh bidang itu. Bila suatu volume memiliki dua bidang simetri, titik-berat volume harus terletak pada garis perpotongan dari kedua bidang itu. Akhirnya, bila volume itu memiliki tiga bidang simetri yang berpotongan pada suatu titik yang terdefinisikan dengan baik (yaitu titik pada suatu garis bersama), titik potong ketiga bidang itu harus berimpit dengan titik-berat volume itu. Sifat ini memungkinkan untuk dapat ditentukan secara cepat titik-berat volume dari bola, elipsoid, kubus, kotak persegi dan sebagainya.

Titik berat volume yang simetris yang hanya memiliki satu atau dua bidang simetri harus ditentukan dengan melalui integrasi. Titik berat volume yang bentuknya biasa dijumpai tergambar dalam gambar 19. Perlu diperhatikan bahwa titik berat benda putar pada umumnya tidak berimpit dengan titik berat penampangnya. Jadi titik-berat setengah bola berbeda dengan bidang setengah lingkaran, dan titik-berat kerucut berbeda dengan titik-berat segitiga.

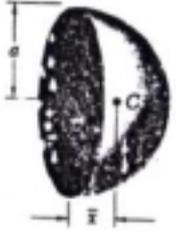
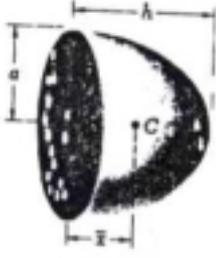
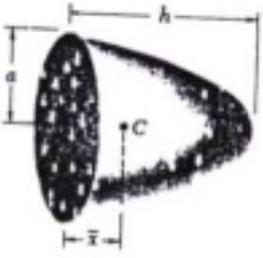
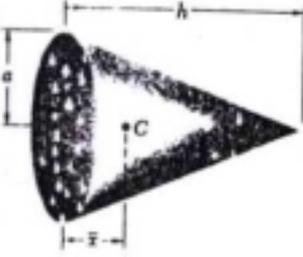
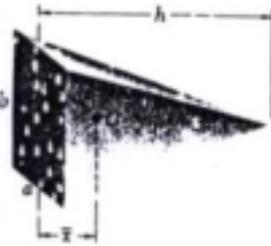
8.2 Benda Komposit

Jika benda itu dapat dibagi-bagi menjadi bentuk sederhana seperti pada gambar 19, koordinat $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ dari pusat gravitasi G diperoleh dengan menyatakan bahwa momen berat total sama dengan jumlah momen berat berbagai bagian komponennya. Persamaan yang diperoleh ialah:

$$\bar{X} \sum W = \sum \bar{x}W \quad \bar{Y} \sum W = \sum \bar{y}W \quad \bar{Z} \sum W = \sum \bar{z}W$$

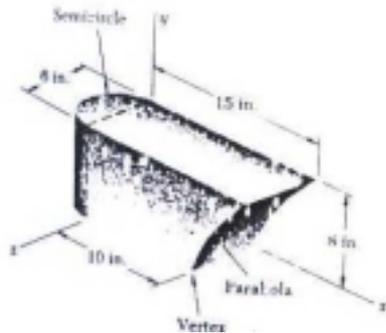
Jika benda itu terdiri dari material homogen, pusat gravitasinya berimpit dengan titik berat volume dan persamaan berikut bisa digunakan:

$$\bar{X} \sum V = \sum \bar{x}V \quad \bar{Y} \sum V = \sum \bar{y}V \quad \bar{Z} \sum V = \sum \bar{z}V$$

Bentuk		\bar{x}	Volume
Setengah-bola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
Setengah-elipsoid putar		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 \cdot h$
Paraboloid putar		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 \cdot h$
Kerucut		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 \cdot h$
Piramid		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

Gambar 19. Titik Berat Volume Sederhana

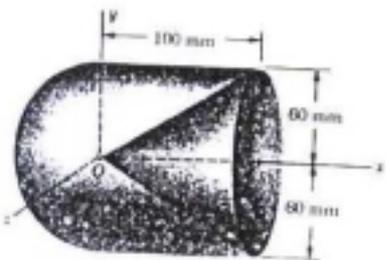
1.



Tentukan pusat gravitasi benda putar homogen yang tergambar.

Jawab: (15mm ; 0 ; 0)

2.



Tentukan pusat gravitasi benda homogen seperti tergambar.

Jawab: (4,72" ; 4,24" ; 3")

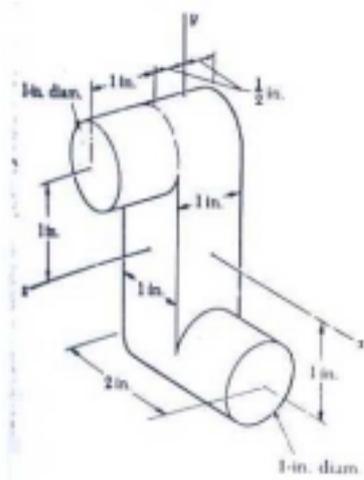
3.



Tentukan kedudukan titik-berat setengah kerucut lingkaran bagian kanan seperti tergambar.

Jawab: (0,75h ; a/π ; 0)

4.



Tentukan pusat gravitasi penghubung seperti terlihat pada gambar.

Jawab: (0,1803" ; 0 ; 0,1803")

BAB IX

MOMEN KEDUA LUASAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Momen inersia dan hubungannya dengan kesetimbangan gaya sebagai momen, Momen inersia kedua luasan sederhana, Dalil sumbu sejajar, Momen inersia luasan yang terdiri atas luasan-luasan sederhana.

9.1 Momen Kedua, atau Momen Inertia Bidang

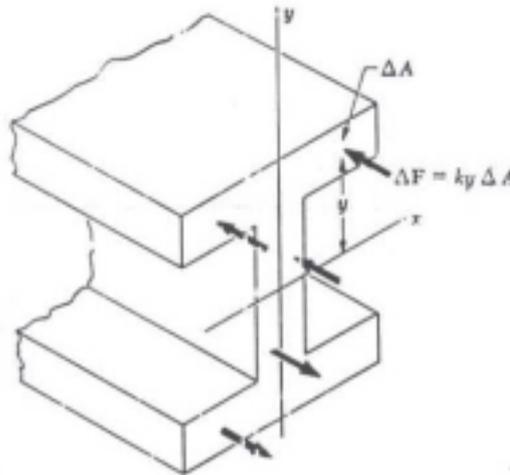
Dalam bab 8, telah dianalisa berbagai sistem gaya yang terdistribusi pada suatu bidang. Dalam kasus pada bab 8, gaya terdistribusi berbanding lurus dengan luas elementer yang bersangkutan. Resultan dari gaya-gaya ini dapat diperoleh dengan menjumlahkan luas yang bersangkutan, dan momen resultan terhadap sumbu tertentu dapat ditentukan dengan menghitung momen pertama dari bidang terhadap sumbu itu. Dalam bab ini akan ditinjau gaya terdistribusi dF yang besarnya tidak hanya bergantung dari luasan elemen dA tempat gaya itu beraksi, tetapi juga dari jarak dari dA pada suatu sumbu tertentu. Lebih tepat lagi, besar gaya itu persatuan luas dF/dA akan berubah secara linear terhadap jarak ke sumbu itu.

Tinjau, misalnya, sebatang balok yang mengalami dua kopel yang besarnya sama dan arahnya berlawanan yang diterapkan pada masing-masing ujung balok. Balok semacam itu mengalami *pelengkungan murni* (*bending*), dan dalam mekanika material ditunjukkan bahwa gaya internal pada setiap bagian balok merupakan gaya terdistribusi yang besarnya $dF = kydA$ yang berubah secara linear terhadap jarak y dari sumbu yang melalui titik-berat bagian itu. Sumbu yang dinyatakan dengan sumbu x dalam gambar 20, dikenal sebagai sumbu netral bagian itu. Gaya pada satu pihak dari sumbu netral merupakan gaya tekan, dan

pada pihak yang lain gaya tarik, sedangkan pada sumbu netral gayanya nol. Besar resultan R dari gaya elementer dF pada seluruh bagian ialah:

$$R = \int ky dA = k \int y dA$$

Integral yang terakhir diperoleh dikenal sebagai *momen pertama* dari bagian itu terhadap sumbu x ; besarnya bervariasi sama dengan yA hingga nol, karena titik-berat bagian itu terletak pada sumbu x . Sistem gaya dF tereduksi menjadi kopel. Momen kopel ini (momen bending) harus sama dengan jumlah momen $dM_x = ydF = ky^2dA$ dari gaya elementer. Dengan mengintegrasikan terhadap seluruh bagian, didapatkan



Gambar 20. Diagram Benda Bebas Balok Dengan Beban Bending

$$M = \int ky^2 dA = k \int y^2 dA$$

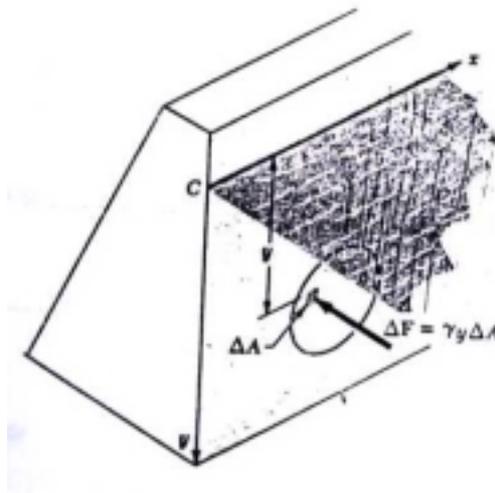
Integral yang terakhir dikenal sebagai *momen kedua*, atau *momen inerti* (istilah momen kedua lebih tepat daripada momen inerti, karena secara logis, yang momen inerti harus dipakai untuk menyatakan integral massa. Namun dalam pemakaian teknik praktis yang biasa, momen inerti dipakai dalam kaitannya dengan luas sebagaimana juga dengan massa) dari elemen balok itu terhadap sumbu x dan dinyatakan dengan I_x . Besarnya diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen luasan dA dengan *jarak kuadrat* dari sumbu x dan mengintegrasikannya

keseluruh bagian balok. Karena masing-masing perkalian y^2dA positif, baik untuk y positif atau negatif (atau nol bila y nol), integral I_x akan selalu berbeda dengan nol dan selalu positif.

Contoh lain dari momen kedua, atau momen inertiya suatu bidang dinyatakan dalam persoalan hidrostatis berikut ini: suatu daun pintu lingkaran dipakai untuk menutup keluaran suatu reservoir besar terbenam dalam air seperti pada gambar 21. Berapakah resultan gaya yang ditimbulkan oleh air pada pintu dan berapakah momen resultan itu terhadap garis perpotongan pintu dengan permukaan air (sumbu x)?

Seandainya kedalaman elemen luasan dA dinyatakan dengan y dan berat jenis air adalah γ , tekanan pada elemen ialah $p = \gamma y$, dan besarnya gaya elementer yang timbul pada dA adalah $dF = pdA = \gamma y dA$. Besarnya resultan gaya elementer ini menjadi:

$$R = \int \gamma y dA = \gamma \int y dA$$



Gambar 21. Gaya Hidrostatik

dan dapat diperoleh dengan mengitung momen pertama bidang pintu terhadap sumbu x . Momen resultan M_x harus sama dengan jumlah $dM_x = y dF = \gamma y^2 dA$ dari gaya elementer. Integrasi keseluruhan bidang pintu diperoleh:

$$M_x = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$

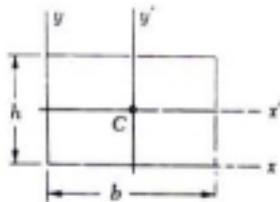
Disini terlihat lagi bahwa integral yang diperoleh menyatakan momen kedua atau momen inertiya I_x dari bidang itu terhadap sumbu x.

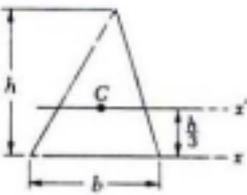
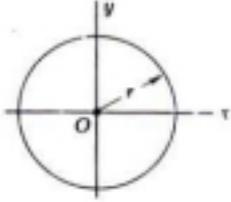
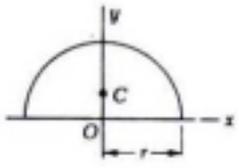
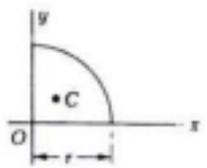
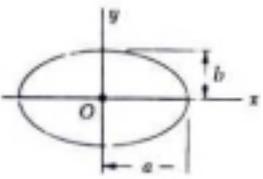
9.2 Penentuan Momen Inertia Suatu Bidang Dengan Integrasi

Dalam pembahasan terdahulu telah didefinisikan momen kedua, atau momen inertiya suatu bidang luas A terhadap sumbu x. Dengan cara yang sama dapat didefinisikan momen kelembaman I_y dari bidang luas A terhadap sumbu y, ditulis:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$$

Integral ini dikenal sebagai *momen inertiya cartesian* bidang luas A yang dapat dihitung lebih mudah jika dipilih dA sebagai suatu pias sejajar dengan salah satu sumbu koordinat. Untuk menghitung I_x , pias yang dipilih harus sejajar sumbu x, sehingga titik-titik yang membentuk pias itu berjarak sama y dari sumbu x; momen inertiya dI_x dari pias diperoleh dengan mengalikan luas dA dari pita itu dengan y^2 . Untuk menghitung I_y , pias yang dipilih harus sejajar dengan sumbu y sehingga titik yang membentuk pias berjarak sama x dari sumbu y; momen inertiya dI_y dari pias itu ialah $x^2 dA$.

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_0 = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$
-----------	--	---

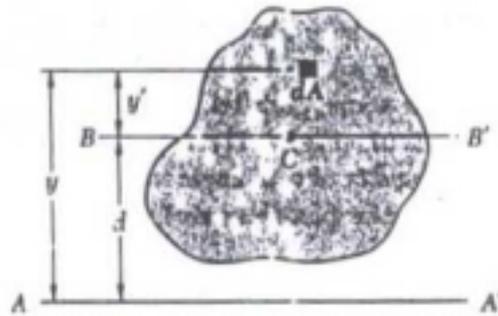
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$
Circle		$I_x = I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_0 = \frac{1}{2}\pi r^4$
Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_0 = \frac{1}{4}\pi r^4$
Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_0 = \frac{1}{8}\pi r^4$
Ellipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3 b$ $J_0 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

Gambar 22. Momen Inertia Bentuk Geometris Sederhana

9.3 Teorema Sumbu Sejajar

Tinjau momen inertiya I dari luasan A terhadap sumbu AA' pada gambar 23. Jarak elemen kecil dA terhadap AA' dinyatakan dengan y , sehingga:

$$I = \int y^2 dA$$



Gambar 23. Momen Inertia Terhadap Sumbu-sumbu Sejajar

Kemudian ditarik sumbu BB' sejajar dengan AA' yang melalui titik-berat C dari bidang itu; sumbu ini disebut sumbu titik berat. Jarak elemen kecil dA terhadap BB' dinyatakan dengan y' , dan terdapat hubungan $y = y' + d$, dimana d adalah jarak antara sumbu AA' dengan BB' . Dengan mengganti y pada persamaan integrasi untuk momen inertia diperoleh:

$$\begin{aligned} I &= \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

Integral yang pertama menyatakan momen kelembaman \bar{I} dari bidang itu terhadap sumbu titik-berat BB . Integral kedua menyatakan momen pertama bidang terhadap BB' ; karena titik berat C dari bidang itu terletak pada sumbu, integral kedua harus sama dengan nol. Integral terakhir sama dengan luas total A . Jadi dapat ditulis:

$$I = \bar{I} + Ad^2$$

Rumus ini menyatakan bahwa momen inertia suatu bidang terhadap sumbu AA' sama dengan momen inertia \bar{I} dari bidang itu terhadap sumbu titik berat BB' yang sejajar dengan AA' ditambah perkalian Ad^2 dari luas bidang dengan kwadrat jarak antara kedua sumbu tersebut d . Teorema ini dikenal sebagai *teorema sumbu sejajar*.

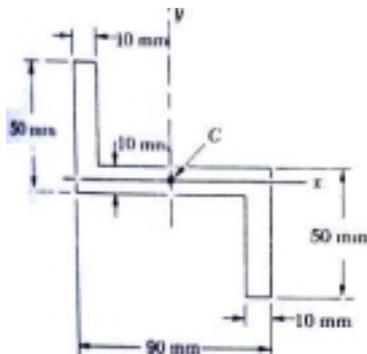
9.4 Momen Inertia Bidang Komposit

Tinjau bidang komposit A yang terdiri dari beberapa komponen bidang A_1, A_2 dan seterusnya. Karena integral yang menyatakan momen inertia A dapat dibagi-bagi menjadi integral meliputi A_1, A_2 dan

seterusnya, momen inertiya A terhadap suatu sumbu tertentu dapat diperoleh dengan menjumlahkan momen inertiya bidang A_1, A_2 dan seterusnya terhadap sumbu tersebut. Momen inertiya bidang yang terdiri dari beberapa bentuk sederhana seperti terlihat pada gambar 22 dapat diperoleh dari rumus-rumus yang diberikan untuk bentuk-bentuk itu. Sebelum menjumlahkan momen inertiya bidang komponen, harus digunakan teorema sumbu-sejajar untuk menghitung masing-masing momen inertiya terhadap sumbu yang diinginkan.

Soal-soal:

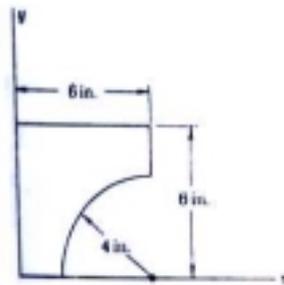
1.



Tentukan momen inertiya bidang pada gambar terhadap sumbu x (I_x)

Jawab: $6,14 \times 10^5 \text{ mm}^4$

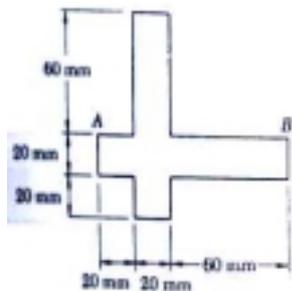
2.



Tentukan momen inertiya bidang pada gambar terhadap sumbu x (I_x)

Jawab : 382 in^4

3.



Tentukan momen inertiya \bar{I}_x dan \bar{I}_y bidang pada gambar terhadap sumbu titik berat yang sejajar dan tegak lurus sisi AB.

Jawab : $\bar{I}_x = \bar{I}_y = 2,08 \times 10^6 \text{ mm}^4$

BAB X

MOMEN INERTIA POLAR

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

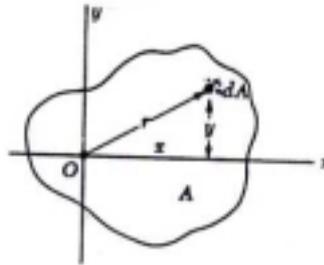
Momen inertia polar dan penerapannya, Hubungan momen inertia polar dengan momen inertia cartesian, Jari-jari girasi.

10.1 Momen Inertia Polar

Integral yang sangat penting dalam persoalan yang menyangkut perputaran poros silindris dan dalam persoalan yang menyangkut perputaran lempengan adalah:

$$J_0 = \int r^2 dA$$

dengan r menyatakan jarak dari elemen luasan dA ke kutub O (gambar 24).



Gambar 24. Momen Inertia Polar

Momen inertia polar dari suatu bidang dapat dihitung dari momen inertia cartesian I_x dan I_y dari bidang itu jika integral ini telah diketahui. Dengan memperhatikan bahwa $r^2 = x^2 + y^2$, dapat ditulis:

$$J_0 = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$J_0 = I_x + I_y$$

10.2 Jari-jari Girasi Suatu Bidang

Tinjau suatu bidang luas A yang bermomen inertia I_x terhadap sumbu x . Kemudian diandaikan bidang tersebut terkonsentrasi menjadi

pias tipis yang sejajar dengan sumbu x, jadi supaya bidang A yang berkonsentrasi mempunyai momen inertiya terhadap sumbu x pias itu harus diletakkan pada jarak k_x dari sumbu x yang didefinisikan melalui hubungan:

$$I_x = k_x^2 A$$

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Jarak k_x dikenal sebagai *jari-jari girasi* dari bidang itu terhadap sumbu x. Dengan cara serupa dapat didefinisikan jari-jari girasi k_y dan k_0 sebagai berikut:

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

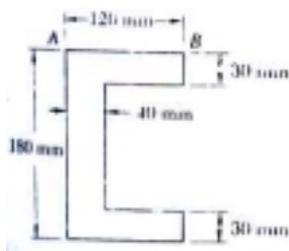
$$I_0 = k_0^2 A \quad k_0 = \sqrt{\frac{I_0}{A}}$$

Dengan mensubstitusikan J_0 , I_x dan I_y yang dinyatakan dalam jari-jari girasi didapatkan:

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Soal-soal:

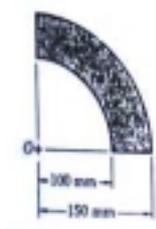
1.



Tentukan momen inertiya polar terhadap titik berat bidang pada gambar.

Jawab: $60,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$.

2.



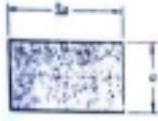
Tentukan momen inertiya polar bidang pada gambar terhadap a) titik O, b) pusat berat dari bidang tersebut.

Jawab:

a) $J_0 = 159,5 \times 10^6 \text{ mm}^4$

b) $\bar{J}_0 = 31,8 \times 10^6 \text{ mm}^4$

3.



Tentukan momen inertiya polar dan jari-jari girasi polar dari persegi panjang pada gambar terhadap titik tengah dari a) sisi panjangnya, b) sisi pendeknya.

Jawab:

a) $4a^4/3$; $a\sqrt{2/3}$

b) $17a^4/6$; $a\sqrt{17/12}$

BAB XI

PRODUCT INERTIA

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

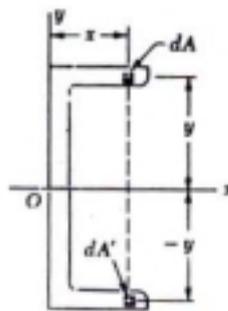
*Product Inertia, I_{max} dan I_{min} , Lingkaran Mohr untuk *product inertia*.*

Integral

$$I_{xy} = \int xy \, dA$$

yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing elemen dA dari luas A dengan koordinatnya x ; y dan mengintegrasikannya ke seluruh bidang dikenal sebagai *product inertia* (perkalian inertia, perkalian kelembaman) dari bidang A terhadap sumbu x dan y . Berbeda dengan momen inertia I_x dan I_y , perkalian inertia I_{xy} dapat bertanda positif atau negatif.

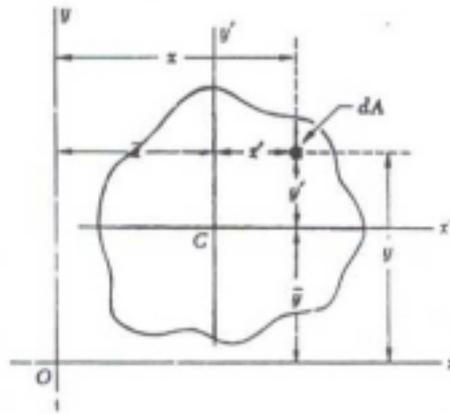
Bila satu atau kedua sumbu x dan y merupakan sumbu simetri untuk bidang A , perkalian inertia I_{xy} menjadi nol. Contoh panel pada gambar 25, karena bagian ini simetri terhadap sumbu x , dapat dipasangkan masing-masing elemen dA yang berkoordinat x dan y dengan elemen dA' yang berkoordinat x dan $-y$ sehingga kontribusi masing-masing pasangan elemen yang dipilih dengan cara ini akan saling meniadakan dan integral untuk product inertia tereduksi menjadi nol.



Gambar 25. Product Inertia Luasan Simetris.

Teorema sumbu sejajar yang mirip pada bab X tentang momen inertia dapat juga diturunkan untuk product inertia. Tinjau bidang A dan sistem

koordinat kartesian x dan y (gambar 26). Melalui titik berat C dari bidang itu yang berkoordinat $(\bar{x}; \bar{y})$; ditarik sumbu titik berat x' dan y' yang sejajar pada sumbu x dan y . Dengan memperhatikan gambar 26 dapat diperoleh rumus berikut untuk product inertia I_{xy} :



Gambar 26. Teorema Sumbu Sejajar Product Inertia

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \int xy dA = \int (x' + \bar{x})(y' + \bar{y}) dA \\
 &= \int x' y' dA + \bar{y} \int x' dA + \bar{x} \int y' dA + \bar{x} \cdot \bar{y} \int dA
 \end{aligned}$$

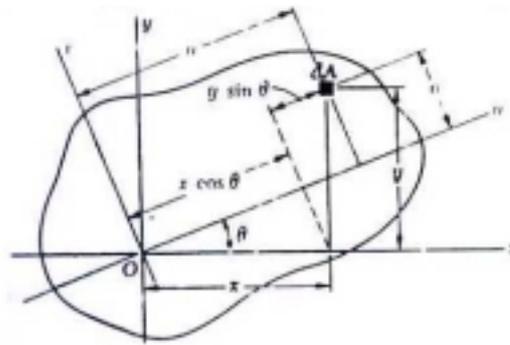
Integral yang pertama menyatakan product momen $\bar{I}_{x'y'}$ dari bidang A terhadap sumbu titik berat x' dan y' . Dua integral berikutnya menyatakan momen pertama dari bidang itu terhadap sumbu titik berat; integral ini tereduksi menjadi nol, karena titik-berat C terletak pada sumbu ini. Akhirnya dapat dilihat integral terakhir sama dengan luas total A. Jadi, dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x} \cdot \bar{y} A$$

11.1 Sumbu Utama dan Momen Inertia Utama

Tinjau bidang yang luasnya A dan sumbu koordinatnya x dan y (gambar 27). Dianggap bahwa momen inertia dan product inertia adalah:

$$I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA \quad I_{xy} = \int xy dA$$



Gambar 27. Sumbu Utama Momen Inertia

dari bidang A diketahui, dan harus ditentukan momen inersia dan product inertia I_u , I_v dan I_{uv} dari A terhadap sumbu baru u dan v yang diperoleh dengan memutar sumbu semula terhadap titik-asal melalui sudut θ .

Dengan memperhatikan hubungan antara koordinat u, v dan x, y dari elemen kecil luasan dA :

$$u = x \cos\theta + y \sin\theta \qquad v = y \cos\theta - x \sin\theta$$

substitusi v ke dalam rumusan untuk I_u , diperoleh:

$$\begin{aligned} I_u &= \int v^2 dA = \int (y \cos\theta - x \sin\theta)^2 dA \\ &= \cos^2\theta \int y^2 dA - 2\sin\theta \cos\theta \int xy dA + \sin^2\theta \int x^2 dA \\ &= I_x \cos^2\theta - 2I_{xy} \sin\theta \cos\theta + I_y \sin^2\theta \end{aligned}$$

dengan cara serupa, diperoleh rumusan untuk I_v dan I_{uv} :

$$\begin{aligned} I_v &= I_x \sin^2\theta + 2I_{xy} \sin\theta \cos\theta + I_y \cos^2\theta \\ I_{uv} &= I_x \sin\theta \cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - I_y \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

dengan menjumlahkan suku demi suku dari persamaan-persamaan diatas dapat diperoleh:

$$I_u + I_v = I_x + I_y$$

Hasil ini bisa diduga sejak semula, karena kedua bagian itu sama dengan momen inersia polar I_o .

Dengan memakai hubungan trigonometrik $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$ dan $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$; dan dengan menelaah persamaan-persamaan di atas diperoleh:

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta$$

Persamaan-persamaan di atas merupakan persamaan parametrik suatu lingkaran. Hal ini berarti bahwa jika dipilih suatu himpunan sumbu cartesian dan diplot titik M pada absis I_u dan ordinat I_{uv} untuk setiap parameter yang diberikan, maka semua titik yang diperoleh akan terletak pada suatu lingkaran. Untuk memperlihatkan sifat ini maka θ dieleminasi dari persamaan-persamaan diatas:

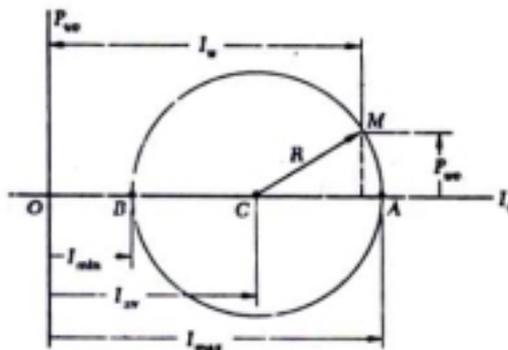
$$\left(I_u - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{uv}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2$$

Jika $I_{av} = \frac{I_x + I_y}{2}$ dan $R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2}$; maka persamaan di atas

dapat ditulis dalam bentuk:

$$(I_u - I_{av})^2 + I_{uv}^2 = R^2$$

yang merupakan persamaan lingkaran dengan jari-jari R yang berpusat di titik C yang berabsis di I_{av} dan ordinatnya O, seperti terlihat pada gambar 28.



Gambar 28. Lingkaran Mohr Untuk Produk Inertia.

Tempat titik A dan B tempat kedua lingkaran yang diperoleh berpotongan dengan sumbu absis mempunyai daya tarik khusus. Titik A bersesuaian dengan harga maksimum momen kelembaman I_u , sedangkan titik B bersesuaian dengan harga minimumnya. Disamping itu, kedua titik itu bertepatan dengan harga nol dari product momen I_{uv} . Jadi, harga θ_m dari parameter θ yang bersesuaian dengan titik A dan B dapat diperoleh dengan pengambilan $I_{uv} = 0$. Dan dengan mengingat harga maksimum/minimum diperoleh jika $dI_u/d\theta = 0$ diperoleh:

$$\tan 2\theta_m = -2I_{xy}/(I_x - I_y)$$

Persamaan ini mendefinisikan dua harga $2\theta_m$ yang berbeda 180° ; ini berarti ada dua harga θ_m yang berbeda 90° . Satu diantaranya bersesuaian dengan titik A pada gambar 28 dan dengan sumbu yang melalui O pada gambar 27; terhadap sumbu itu momen inertiya yang diberikan menjadi maksimum. Harga yang lain bersesuaian dengan titik B dan sumbu yang melalui O; terhadap sumbu itu momen inertiya bidang tersebut menjadi minimum. Kedua sumbu yang didefinisikan dengan cara itu yang saling tegak-lurus disebut *sumbu utama bidang itu terhadap O*, dan harga momen inertiya yang bersesuaian I_{max} dan I_{min} disebut *momen kelembaman utama terhadap O*. Dari gambar 28 dapat dilihat:

$$I_{max} = I_{av} + R \quad \text{dan} \quad I_{min} = I_{av} - R$$

Dengan mensubstitusikan I_{av} dan R, dapat ditulis:

$$I_{max,min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Karena dua harga θ_m diperoleh dengan mengambil $I_{uv} = 0$, jelas bahwa perkalian inertiya bidang yang diberikan terhadap sumbu utamanya menjadi nol. Dengan mengacu pembahasan-pembahasan sebelumnya, terlihat jika suatu bidang memiliki sumbu simetri melalui titik O, sumbu ini harus menjadi sumbu utama bidang itu terhadap O. Di pihak lain, suatu sumbu utama tidak perlu merupakan sumbu simetri; tidak

bergantung dari apakah suatu bidang memiliki sumbu simetri atau tidak, bidang itu akan memiliki dua sumbu utama terhadap setiap titik O .

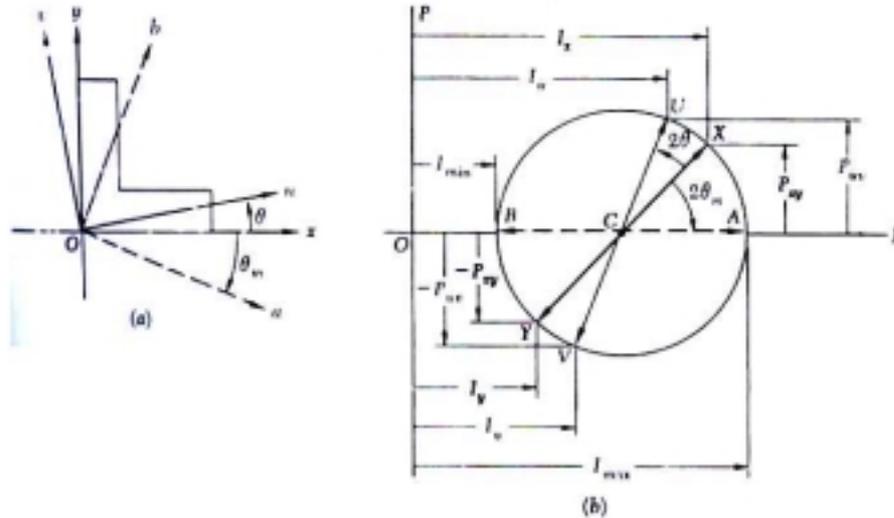
Sifat yang diperlihatkan tersebut berlaku untuk setiap titik O yang terletak di dalam atau di luar bidang yang ditinjau. Jika dipilih berimpit dengan titik berat bidang maka setiap sumbu melalui O ialah sumbu titik-berat; kedua sumbu utama bidang itu terhadap titik-berat dikenal sebagai sumbu titik-berat utama bidang itu.

11.2 Lingkaran Mohr Untuk Perkalian Inertia

Lingkaran yang dipakai dalam pasal yang lalu memperhatikan hubungan yang ada antara momen inertia dan product inertia dari suatu bidang terhadap sumbu yang melalui titik tetap O yang mula-mula diperkenalkan oleh seorang insinyur Jerman Otto Mohr (1835 – 1918) yang dikenal sebagai *lingkaran Mohr*. Akan dapat dilihat bahwa jika momen inertia atau product inertia suatu bidang terhadap sumbu x dan y yang melalui titik O diketahui, lingkaran Mohr dapat dipakai untuk menentukan secara grafik (a) *sumbu utama* dan *momen inertia utama* dari bidang itu terhadap O , atau (b) momen inertia dan product inertia dari bidang terhadap pasangan sumbu Cartesian yang lain u dan v yang melalui O .

Tinjau suatu bidang A dan dua sumbu koordinat Cartesian x dan y (gambar 29a). Dengan momen inertia I_x dan I_y dan product inertia I_{xy} diketahui, dan akan dinyatakan pada suatu diagram dengan memplot suatu titik X yang berkoordinat I_x dan I_y dan product inertia I_{xy} diketahui, dan suatu titik Y yang berkoordinat I_y dan $-I_{xy}$. Dengan menghubungkan X dan Y dengan suatu garis lurus, didefinisikan titik C dari perpotongan garis XY dengan sumbu I dan digambarkan lingkaran yang berpusat C dan berdiameter XY . Dengan memperhatikan bahwa absis C dan jejari lingkarannya berturut-turut, sama dengan kuatitas I_{uv} dan R yang didefinisikan melalui persamaan-persamaan yang diturunkan sebelumnya, dapat diambil kesimpulan bahwa lingkaran yang diperoleh ialah lingkaran Mohr untuk bidang yang ditinjau terhadap titik O . Jadi

absis titik A dan B tempat lingkaran memotong sumbu I menyatakan, berturut-turut, momen kelembaman utama I_{max} dan I_{min} dari bidang itu.



Gambar 29. Lingkaran Mohr Untuk Sumbu Utama

Dan karena $\tan(XCA) = 2I_{xy}/(I_x - I_y)$, maka sudut XCA sama besar dengan salah satu sudut $2\theta_m$; jadi sudut θ_m yang terlihat pada gambar, sumbu utama Oa yang bersesuaian dengan titik A dapat diperoleh dengan membagi dua sudut XCA yang diukur pada lingkaran Mohr. Juga terlihat bahwa jika $I_x > I_y$ dan $I_{xy} > 0$, seperti yang ditinjau di sini, perputaran yang membawa CX ke CA sesuai dengan putaran jarum jam. Dapat juga terlihat, sudut θ_m yang diperoleh dari persamaan dan dengan mendefinisikan sumbu Oa dalam gambar 29a.

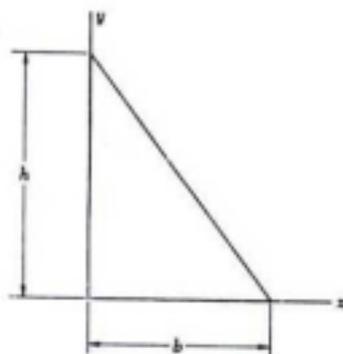
Karena lingkaran Mohr terdefiniskan secara unik, lingkaran yang sama dapat diperoleh dengan meninjau momen inerti dan product inerti dari bidang A terhadap sumbu Cartesian u dan v. Titik U yang berkoordinat I_u dan I_{uv} dan titik V yang berkoordinat I_v dan $-I_{uv}$ akan terletak pada lingkaran Mohr, dan sudut UCA dalam gambar 29b ialah dua kali sudut xOu dalam gambar 29a. Jadi diameter UV yang mendefinisikan momen inerti dan product inerti I_u, I_v dan I_{uv} dari bidang yang ditinjau terhadap sumbu Cartesian u dan v yang membentuk sudut

θ dengan sumbu x dan y dapat diperoleh dengan perputaran melalui sudut 2θ diameter XY yang bersesuaian dengan momen inertiya dan product inertiya I_x , I_y dan I_{xy} . Terlihat bahwa perputaran yang membawa diameter XY ke diameter UV dalam gambar 29b mempunyai arah yang sama dengan perputaran yang membawa sumbu xy menjadi uv dalam 29a.

Perlu diperhatikan bahwa lingkaran Mohr tidak terbatas pada pemecahan secara grafik, yaitu pemecahan yang berdasarkan pada penggambaran yang hati-hati dan pengukuran berbagai parameter yang berkaitan. Hanya dengan menggambar sketsa lingkaran Mohr dan memakai trigonometri, dapat dengan mudah diturunkan berbagai hubungan yang diperlukan untuk perhitungan numerik dari persoalan yang ditinjau.

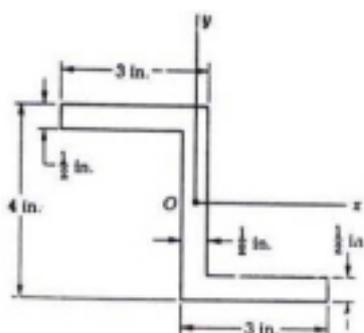
Soal-soal:

1.



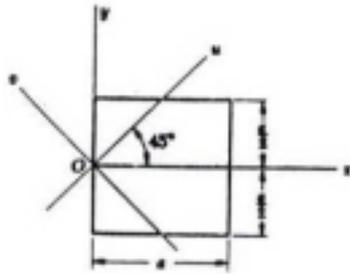
Tentukan perkalian kelembaman segitiga siku-siku yang tergambar (a) terhadap sumbu x dan y dan (b) terhadap sumbu titik-berat yang sejajar dengan sumbu x dan y .

2.



Untuk bagian benda yang tergambar, momen kelembaman terhadap sumbu x dan y telah dihitung dan didapatkan: $I_x = 10,38 \text{ in}^4$ dan $I_y = 6,97 \text{ in}^4$. Tentukan (a) sumbu utama bagian itu terhadap titik O , (b) besar momen inertiya utama dari bagian itu terhadap sumbu O .

3.



Tentukan momen inertiya dan perkalian kelembaman bujur sangkar yang tergambar terhadap sumbu u dan v .

BAB XII

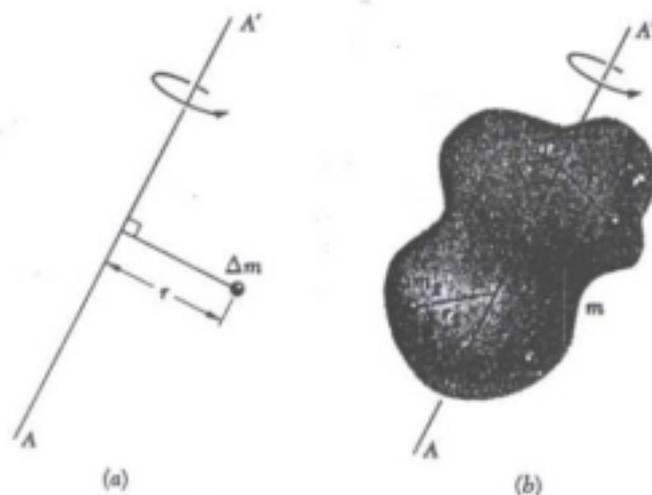
MOMEN INERTIA MASSA

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Momen inersia massa, Dalil sumbu sejajar, Momen inersia keping, Momen inersia keping komposit, Momen inersia volume, Momen inersia banaan komposit.

12.1 Momen Inertia Massa

Tinjau benda bermassa kecil dm yang didukung oleh sebatang tongkat yang massanya dapat diabaikan yang dapat berputar bebas terhadap sumbu AA' . Jika suatu kopel diterapkan pada sistim itu, sistim tongkat dan massa yang mula-mula dalam keadaan diam akan mulai berputar terhadap sumbu AA' . Perincian pergerakan ini akan ditinjau kembali dalam bagian dinamika. Sekarang hanya ditunjukkan bahwa waktu yang diperlukan sistim untuk mencapai kelajuan putar tertentu berbanding lurus dengan massa dm dan jarak kuadrat r . Jadi perkalian r^2dm menyatakan ukuran *inertia* sistem itu, yaitu kelembaman sistim jika dicoba untuk menggerakkan sistim itu. Dengan alasan ini perkalian r^2dm disebut *momen inertia massa dm* terhadap sumbu AA' .



Gambar 30. Momen Inertia Sebuah Massa

Tinjau sebuah benda bermassa m yang akan diputar terhadap sumbu AA' (gambar 30b). Dengan membagi-bagi benda itu menjadi elemen massa dm_1, dm_2, \dots didapat bahwa inertia benda diukur oleh jumlahan $r_1^2 dm_1 + r_2^2 dm_2 + \dots$. Jadi jumlahan ini menyatakan momen inertia benda terhadap sumbu AA' . Dengan menambah jumlahan momen didapat bahwa momen inertia dalam limitnya sama dengan intergral:

$$I = \int r^2 dm$$

Jari-jari girasi k , dari benda terhadap sumbu AA' didefinisikan melalui hubungan:

$$I = k^2 m k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

Jadi jari-jari girasi k menyatakan jarak titik tempat seluruh massa benda terkonsentrasi supaya momen kelembaman terhadap AA' tidak berubah. Apakah benda itu dipertahankan dalam bentuk semula atau terkonsentrasi, massa m akan bereaksi dengan cara yang sama terhadap perputaran (rotasi) terhadap AA' .

Jika dipakai satuan SI, jari-jari girasi k dinyatakan dalam meter dan massa m dalam kilogram. Jadi momen inertia sebuah massa akan dinyatakan dalam kg.m^2 . Jika dipakai satuan british, jari-jari girasi dinyatakan dalam ft dan massanya dalam slug, yaitu $\text{lb.s}^2/\text{ft}$. Jadi momen inertia massa dinyatakan dalam lf.ft.s^2 .

Momen inertia sebuah benda terhadap suatu sumbu koordinat dapat dengan mudah dinyatakan dalam koordinat x, y, z dari elemen massa dm . Dengan mengingat jarak r kuadrat dari elemen ke sumbu y ialah $z^2 + x^2$, maka momen kelembaman benda terhadap sumbu y ialah:

$$I_y = \int r^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$$

Rumusan serupa juga dapat diperoleh untuk momen kelembaman terhadap sumbu x dan z .

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

12.2 Teorema Sumbu Sejajar

Tinjau suatu benda bermassa m . Ambil $Oxyz$ sebagai sistim koordinat caresian dengan titik-asal pada titik sembarang O , dan $Gx'y'z'$ suatu sistim sumbu titik-berat sejajar, yaitu merupakan sistim yang titik-asalnya pada pusat gravitasi G benda yang ditinjau dan dengan sumbu x',y',z' berturut-turut sejajar dengan sumbu x,y,z . Dengan memberi lambang $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sebagai koordinat G terhadap $Oxyz$, dapat ditulis hubungan berikut antara koordinat x',y',z' dari elemen dm terhadap $Oxyz$ dan koordinat x',y',z' :

$$x = x' + \bar{x}; \quad y = y' + \bar{y}; \quad z = z' + \bar{z}$$

sehingga dapat dinyatakan momen inertiya benda terhadap sumbu x sebagai berikut:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2] dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2) dm + 2\bar{y} \int y' dm + 2\bar{z} \int z' dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \int dm \end{aligned}$$

Integral pertama dalam rumusan yang diperoleh menyatakan momen inertiya \bar{I}_x , dari benda terhadap sumbu titik-berat x' ; integral kedua dan ketiga menyatakan momen pertama benda terhadap bidang $x'z'$ dan $x'y'$, berturut-turut dan karena kedua bidang itu mengandung G , kedua integral itu menjadi nol; integral yang terakhir sama dengan massa total m benda itu. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$I_x = \bar{I}_x + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2)$$

dengan cara serupa didapat:

$$I_y = \bar{I}_y + m(\bar{x}^2 + \bar{z}^2)$$

$$I_z = \bar{I}_z + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

dengan mudah dapat dibuktikan bahwa jumlahan $\bar{x}^2 + \bar{z}^2$ menyatakan kuadrat jarak OB antara sumbu y dan y' . Demikian juga, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ dan $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ menyatakan kuadrat jarak antara sumbu x dan x' , serta sumbu z dan z' . Jika jarak antara sumbu sembarang AA dengan sumbu titik-berat

yang sejajar BB diberi lambang d , dapat ditulis hubungan umum antara momen inertiya I benda tersebut terhadap AA' dan momen inertiya \bar{I} terhadap BB' sebagai berikut:

$$I = \bar{I} + md^2$$

Dengan menyatakan momen inertiya ke dalam jari-jari girasi yang bersangkutan, dapat juga dituliskan:

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2$$

dengan k dan \bar{k} menyatakan jari-jari girasi terhadap AA' dan BB' berturut-turut.

12.3 Momen Inertiya Keping Tipis

Tinjau keping tipis yang tebalnya serbasama t , yang terbuat dari bahan yang homogen dengan massa jenis ρ . Momen inertiya massa dari keping itu terhadap sumbu AA' yang terletak pada bidang keping ialah:

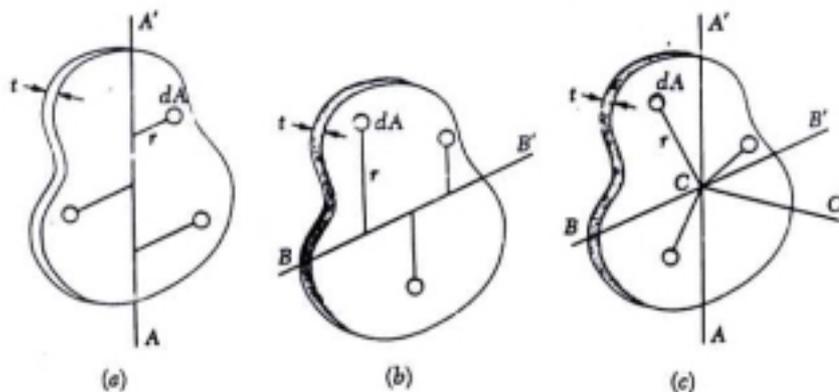
$$I_{AA',mass} = \int r^2 dm = \rho t \int r^2 dA$$

tetapi r menyatakan jarak elemen luas dA terhadap sumbu AA' ; jadi integralnya sama dengan momen inertiya keping terhadap AA' . Didapat:

$$I_{AA',mass} = \rho t I_{AA',area}$$

dengan cara serupa, terhadap sumbu BB' yang tegak lurus AA' , diperoleh:

$$I_{BB',mass} = \rho t I_{BB',area}$$



Gambar 31. Momen Kelembaman Keping Tipis.

Tinjau sumbu CC' tegak lurus pada keping melalui titik perpotongan C dari AA' dan BB' dapat ditulis:

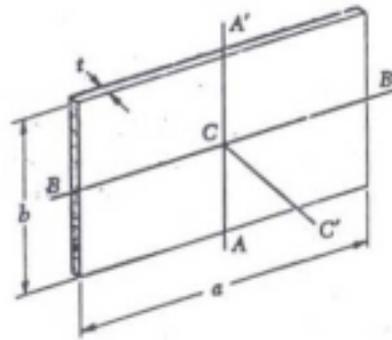
$$I_{CC',mass} = \rho t I_{0C,area}$$

dengan I_0 menyatakan momen inertiya polar dari keping terhadap titik C . Dengan mengingat hubungan $I_{0C} = I_{AA'} + I_{BB'}$ hubungan antara momen inertiya keping tipis dapat ditulis sebagai berikut:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'}$$

12.3.1 Keping Persegi Empat

Dalam kasus keping persegi-empat yang bersisi a dan b (gambar 32) didapat momen inertiya massa terhadap sumbu yang melalui pusat gravitasi keping adalah:



Gambar 32. Keping Persegi Empat

$$I_{AA',mass} = \rho t I_{AA',area} = \rho t \left(\frac{1}{12} a^3 b \right)$$

$$I_{BB',mass} = \rho t I_{BB',area} = \rho t \left(\frac{1}{12} a b^3 \right)$$

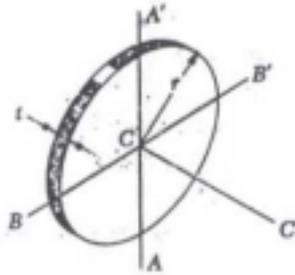
Mengingat perkalian $\rho a b t$ sama dengan massa m keping itu, dapat ditulis momen kelembaman massa dari keping persegi-empat tipis sebagai:

$$I_{AA',mass} = \frac{1}{12} m a^2 \qquad I_{BB',mass} = \frac{1}{12} m b^2$$

$$I_{CC',mass} = I_{AA',mass} + I_{BB',mass} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

12.3.2 Keping Bundar

Dalam kasus keping bundar, atau piringan, berjari-jari r (gambar 33) dapat ditulis:



Gambar 33. Keping Bundar.

$$I_{AA',mass} = \rho t I_{AA',area} = \rho t (\frac{1}{4}\pi r^4)$$

Mengingat perkalian $\rho\pi r^2 t$ sama dengan massa m dari keping itu dan $I_{AA'} = I_{BB'}$, momen inerti keping bundar dapat ditulis sebagai:

$$I_{AA',mass} = I_{BB',mass} = \frac{1}{4}mr^2$$

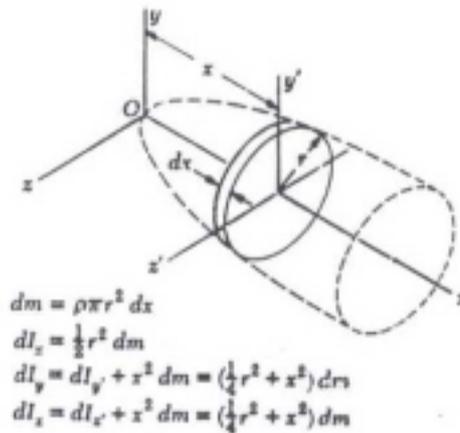
$$I_{CC',mass} = I_{AA',mass} + I_{BB',mass} = \frac{1}{2}mr^2$$

12.4 Momen Inertia Volume Dengan Integrasi

Momen inerti volume diperoleh dengan menghitung integral $I = \int r^2 dm$. Jika benda itu terdiri dari bahan homogen berkerapatan ρ diperoleh $dm = \rho dV$ dan $I = \rho \int r^2 dV$. Integral ini hanya bergantung dari bentuk benda. Supaya bisa dihitung, biasanya perlu dilakukan integrasi rangkap tiga atau sekurang-kurangnya rangkap dua.

Namun jika benda itu memiliki dua bidang simetri, biasanya bisa ditentukan momen kelembaman dengan integrasi tunggal dengan memilih pias dm tegak lurus pada bidang simetri. Dalam kasus benda putar, misalnya, elemen massa harus merupakan piringan tipis (gambar 34). Dengan memakai rumusan momen inerti untuk piringan, momen inerti piringan terhadap sumbu putar dapat dinyatakan dengan mudah. Momen inerti terhadap masing-masing sumbu koordinat lainnya dapat

diperoleh dengan rumusan untuk $I_{AA'}$ dan $I_{BB'}$ untuk keping bundar gambar 33 dan dengan menggunakan teorema sumbu sejajar. Integrasi rumusan yang diperoleh akan menghasilkan momen kelembaman benda putar yang diinginkan.

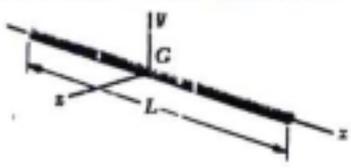
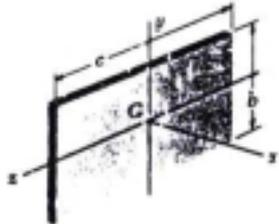
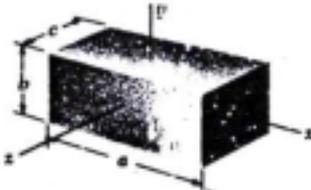
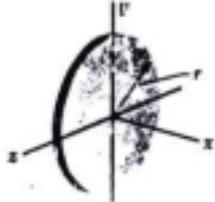
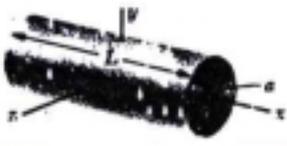
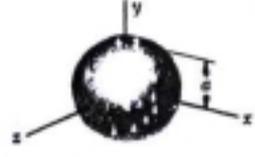


Gambar 44. Penentuan Momen Inertia Benda Putar.

Pada gambar 45 ditunjukkan momen inertia volume sederhana yang biasa dijumpai.

12.5 Momen Inertia Benda Komposit.

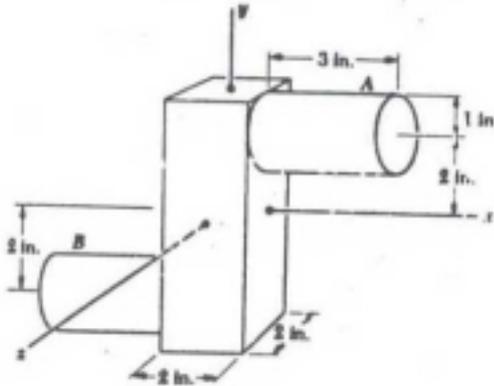
Momen inertia benda komposit biasanya dapat diuraikan menjadi momen inertia volume sederhana pada gambar 45. Momen inertia benda terhadap sumbu tertentu dari benda yang terdiri dari beberapa bentuk sederhana ini dapat diperoleh dengan menghitung momen inertia tiap komponen volume sederhana terhadap sumbu yang diinginkan dengan menggunakan teorema sumbu sejajar dan kemudian menjumlahkannya. Perlu diperhatikan seperti juga untuk kasus bidang, bahwa jari-jari girasi benda komposit tidak bisa diperoleh dengan menjumlahkan jari-jari girasi komponennya.

Slender rod		$I_y = I_x = \frac{1}{12}mL^2$
Thin rectangular plate		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$
Rectangular prism		$I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$
Circular cylinder		$I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
Circular cone		$I_x = \frac{3}{80}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{80}m(\frac{3}{2}a^2 + h^2)$
Sphere		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$

Gambar 45. Momen Inertia Massa Benda-benda Sederhana

Soal – soal:

1.

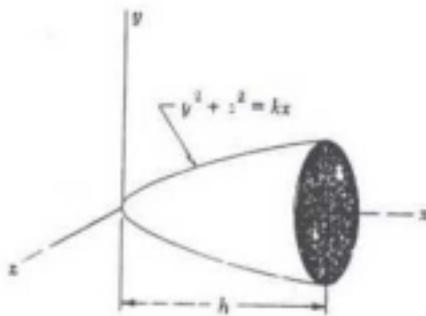


Suatu baja tempa terdiri dari prisma persegi-empal 6x2x2 inc dan dua tabung berdiameter 2inc dan panjangnya 3inc, seperti terlihat pada gambar. Tentukan momen inertiya massa terhadap sumbu koordinat yang ditunjukkan, jika diketahui berat jenis baja = 490 lb/ft³.

Jawab: $I_{x, \text{mass}} = 3520 \text{ kg.mm}^2$;

$I_{y, \text{mass}} = 5670 \text{ kg.mm}^2$; $I_{z, \text{mass}} = 8800 \text{ kg.mm}^2$

2.

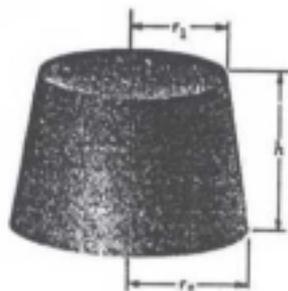


Tentukan dengan integrasi langsung momen inertiya massa dan jari-jari girasi terhadap sumbu x dan sumbu y dari suatu paraboloid yang tergambar, dengan menganggap kerapatan serba-sama dan massa m .

Jawab: $I_x = ma^2/3$ dan $k_x = a/\sqrt{3}$

$I_y = m(a^2 + 3h^2)/6$ dan $k_y = [(a^2+3h^2)/6]^{1/2}$

3.



Tentukan momen inertiya massa potongan kerucut lingkaran tegak bermassa m terhadap sumbu simetrinya.

Jawab:

$$\frac{3}{10} m \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$$